

# 交换交叉立方网络在 MM 模型下的条件诊断度研究

郭晨<sup>1,2</sup>, 冷明<sup>1,3</sup>, 彭硕<sup>1</sup>, 王博<sup>1</sup>

(1. 井冈山大学电子与信息工程学院, 江西 吉安 343009;  
2. 广西大学电气工程学院, 广西 南宁 530004; 3. 清华大学计算机科学与技术系, 北京 100084)

**摘要:** 交换交叉立方网络 (ECQ) 是新型互连网络拓扑结构研究的最新成果, 交换交叉立方网络在保留超立方网络的递归结构、高可划分性和高连通性等优点的基础上, 具有相对较小的网络直径、更少的连通边和构建成本, 表现出更高的性价比。以交换交叉立方网络为研究对象, 通过对交换交叉立方网络拓扑结构的研究, 得出交换交叉立方网络的一系列拓扑性质与连通度定理。进而, 根据连通度与诊断度的关联关系首次得出交换交叉立方网络  $ECQ(s, t)$  在 MM 模型下的条件诊断度为  $3s - 2$ , 其中,  $t \geq s \geq 2$ 。研究成果将为交换交叉立方网络的可靠性评价提供关键性参数, 具有重要的理论价值和现实意义。

**关键词:** 交换交叉立方网络; 条件  $t$ -可诊断; 条件故障集合; MM 模型; 条件诊断度

**中图分类号:** TP301

**文献标识码:** A

## Conditional diagnosability of exchanged crossed cube under the MM model

GUO Chen<sup>1,2</sup>, LEMG Ming<sup>1,3</sup>, PENG Shuo<sup>1</sup>, WANG Bo<sup>1</sup>

(1. School of Electronic and Information Engineering, Jinggangshan University, Ji'an 343009, China;  
2. School of Electrical Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China;  
3. Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Exchanged crossed cube (ECQ) was the latest achievement in the study of novel interconnection network topology. ECQ retained the advantages of hypercube such as recursive structure, high partitionability and strong connectivity, with better properties than other variations of hypercube in terms of the smaller diameter, fewer links, and lower cost factor, which indicated more balanced consideration among performance and cost. As the study object, after topological analyzing, some important topological properties and connectivity theorems of ECQ were introduced, then the conditional diagnosability of  $ECQ(s, t)$  was determined under the MM model, which was  $3s - 2$  for  $t \geq s \geq 2$ . The research results will provide the key parameters for the reliability evaluation of ECQ in the future. So it has important theoretical significance and application value.

**Key words:** exchanged crossed cube, conditional  $t$ -diagnosable, conditional fault set, MM model, conditional diagnosability

## 1 引言

半个世纪以来, 高性能集成电路的普及推动着半导体工艺技术的不断进步, 在经历了 4 个阶段的发展之后, 现在的芯片集成度越来越高, 而尺寸却越来越小。半导体工艺技术不断发展的同时, 社会需求也在

不断向前进步, 传统的单处理器计算机系统由于处理器运算性能受制于芯片工艺极限, 已经无法满足当前的计算需要, 于是, 按照新型互连网络拓扑结构进行架构的多处理器计算机系统应运而生。

由于新型互连网络结构的递归性、高可划分性、高连通性以及相对较小的网络直径等特征, 使

收稿日期: 2016-10-18; 修回日期: 2017-07-10

通信作者: 冷明, 33443240@qq.com

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61562046); 江西省教育厅科技基金资助项目 (No.GJJ150777, No.GJJ160742)

**Foundation Items:** The National Natural Science Foundation of China (No.61562046), Science and Technology Project of Jiangxi Provincial Education Department (No.GJJ150777, No.GJJ160742)

其具有低成本、高容错等优点。经过半个世纪的发展, 新型互连网络拓扑结构已经发展成一个具有多层继承关系的集族, 包括超立方网络 (hypercube, 简称  $Q_n$ )<sup>[1]</sup>、折叠立方网络 (folded hypercube, 简称  $FQ_n$ )<sup>[2]</sup>、交叉立方网络 (crossed cube, 简称  $CQ_n$ )<sup>[3]</sup>、莫比乌斯立方网络 (Möbius cube, 简称  $MQ_n$ )<sup>[4]</sup>、平衡立方网络 (balanced hypercube, 简称  $BH_n$ )<sup>[5]</sup>、扭立方网络 (twisted cube, 简称  $TQ_n$ )<sup>[6]</sup>(1999)、局部扭立方网络 (locally twisted cube, 简称  $LTQ_n$ )<sup>[7]</sup>(2005)、交换超立方网络 (EH, exchanged hypercube)<sup>[8]</sup>、交换交叉立方网络 (ECC, exchanged crossed cube)<sup>[9]</sup>等。其中, 交换交叉立方网络是新型互连网络拓扑结构研究的最新成果, 它同时继承了交换超立方网络和交叉立方网络的优点, 相对而言具有更小的网络直径、更少的连通边和更低廉的构建成本, 表现出更高的性价比<sup>[9]</sup>。但是, 到目前为止, 新型互连网络的应用还很少。

影响新型互连网络应用和推广的主要原因之一就是其连通度和诊断度研究尚不系统。具体来说, 迄今为止, 已经相继求出超立方网络<sup>[10-14]</sup>、莫比乌斯立方网络<sup>[11,12]</sup>和平衡立方网络<sup>[15,16]</sup>的诊断度和条件诊断度, 但是还有很多方面未涉及, 包括扭立方网络、局部扭立方网络、交叉立方网络、交换超立方网络和交换交叉立方网络的相关拓扑性质、连通度和部分诊断度。

从特征上看, 新型互连网络潜在的最大应用领域就是超级计算机。超级计算机包括海量的处理器, 以 2016 年排名世界第一的超级计算机——神威“太湖之光”为例, 它是由 40 960 块处理器通过互连网络连接而成。与单处理器计算机系统相比, 多处理器的超级计算机系统出现不可靠的概率成倍甚至几何级数增加, 而不可靠概率超过一定限度将大大降低系统的可信性。在这个处理器规模庞大的超级计算机系统的运行过程中, 出现个别或小规模的处理器故障是不可避免的现实问题, 然而其影响却极其巨大。因此, 就更加迫切地需要对故障处理器进行快速而准确的定位。而如果多处理器超级计算机系统是遵从一个规则的新型互连网络拓扑结构, 如超立方网络、交换交叉立方网络等, 通过对其拓扑结构进行可靠性分析就有可能计算出它的诊断度。基于此, 在故障处理器数目不超过诊断度的情况下, 就可以通过诊断算法快速地计算出故障处理器的位置并进

行及时替换处理。因此, 新型互连网络的诊断度研究对于超级计算机的可靠性评价有着非常重要的理论价值和现实意义。

基于此, 本文以新型互连网络拓扑结构研究的最新成果——交换交叉立方网络  $ECQ(s,t)$  为研究对象。在得到  $ECQ(s,t)$  相关拓扑性质的基础上, 对  $ECQ(s,t)$  的连通度性质展开研究, 得出 2 个重要的连通度定理。进而对  $ECQ(s,t)$  在 MM 模型下的条件诊断度进行研究, 首次得出  $ECQ(s,t)$  在 MM 模型下的条件诊断度为  $3s-2$ , 其中,  $t \geq s \geq 2$ 。本文深入研究了  $ECQ(s,t)$  的拓扑性质, 并结合连通度与条件诊断度之间的关联关系, 首次论证了在确认每个节点至少有一个正确的邻节点的情况下,  $ECQ(s,t)$  能自动诊断出的最大故障节点数为  $3s-2$ 。本文的研究成果有利于进一步理清交换交叉立方网络的可靠性能, 为交换交叉立方网络的应用和推广奠定了坚实的理论基础。

## 2 预备知识

诊断性研究是新型互连网络可靠性研究的核心内容之一。研究发现, 要直接判定系统测试结果的正确与否, 有时非常复杂, 且容易出现一定比的误判, 而通过比较的方式来界定测试结果相较直接判定要简单很多。基于这种考虑, 1980 年, Malek 首次提出了一种称之为 MM 模型的比较故障诊断模型<sup>[17]</sup>。不同于传统的 PMC 模型<sup>[18]</sup>, MM 模型通过一个比较器把任务发送给与它相邻的 2 个处理器节点, 然后通过比较它们的测试结果来进行诊断。这种故障诊断模型的主要优点在于操作相对便捷。MM 模型在不同取值下的测试结果如表 1 所示, 其中,  $w$  表示比较器,  $u$  和  $v$  表示为  $w$  的 2 个邻接测试节点处理器,  $(u,v)_w$  表示  $w$  为比较器时对邻节点  $u$  和  $v$  的比较测试,  $\sigma((u,v)_w)$  表示  $(u,v)_w$  的测试结果。MM 模型下的故障诊断系统  $G$  可以用  $M(V(G),L)$  来表示, 其中,  $V(G)$  表示节点集合,  $L$  表示比较测试边集合。 $(u,v)_w \in L$  表示系统  $G$  存在着比较测试  $(u,v)_w$ 。

诊断处理除了需要有特定的故障诊断模型之外, 还需要有针对性的诊断方式。系统级故障诊断已经研究出多种故障诊断方式。早在 1967 年, Preparata 等<sup>[18]</sup>就提出了  $t$ -可诊断。之后提出的条件  $t$ -可诊断<sup>[10]</sup>是在  $t$ -可诊断的基础上进一步拓展的诊断性理论, 条件  $t$ -可诊断要求系统中的每一个节点

至少有一个正确（未发生故障）的邻节点。条件故障集合指的是满足条件  $t$ -可诊断要求的故障节点集合。满足条件  $t$ -可诊断的系统被称为条件  $t$ -可诊断系统，可根据定理 1 进行判定。

表 1 MM 模型的测试规则

$w$	$u$	$v$	$\sigma((u,v)_w)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0 或 1
1	0	1	0 或 1
1	1	0	0 或 1
1	1	1	0 或 1

**定理 1**<sup>[10]</sup> 系统是条件  $t$ -可诊断系统，当且仅当所有故障节点数小于或等于  $t$  的条件故障集合都两两可区分。

条件  $t$ -可诊断系统的诊断能力用条件诊断度  $t_c$  表示，指的是系统是条件  $t$ -可诊断系统时， $t$  可以取到的最大正整数。因此，条件诊断度是衡量系统诊断能力和可靠性能的重要指标。

交换交叉立方网络是 2013 年 Li 等<sup>[9]</sup>提出的一种新型互连网络拓扑结构，是超立方网络变种研究的最新成果。

在对交换交叉立方网络进行定义和性质分析之前，首先说明关联对的定义。

**定义 1**<sup>[3]</sup> 设 2 个 2 位的二进制字符串  $X$  和  $Y$ ， $X = x_1x_0$ ， $Y = y_1y_0$ 。用  $X \sim Y$  来表示  $X$  和  $Y$  是关联对，其中，符号“ $\sim$ ”表示关联， $X \sim Y$  当且仅当  $(X, Y) \in \{(00, 00), (10, 10), (01, 11), (11, 01)\}$ 。

交换交叉立方网络包括 2 个参数，表示为  $ECQ(s, t)$ ， $s \geq 1$ ， $t \geq 1$ 。 $ECQ(s, t)$  可以用图  $G(V, E)$  来表示，其中， $V = \{a_{s-1}a_{s-2} \dots a_0b_{t-1}b_{t-2} \dots b_0c \mid a_i, b_j, c \in \{0, 1\}, i \in [0, s], j \in [0, t]\}$ ， $E = \{(u, v) \mid (u, v) \in V \times V\}$ ， $V$  中的任意节点  $u$  在位置  $i$  的取值用  $u[i]$  表示，节点  $u$  从第  $i$  个位置到第  $j$  个位置的取值用  $u[i:j]$  表示，其中， $i \leq j$ 。 $E$  有 3 种类型的边集合，分别表示为  $E_1$ 、 $E_2$  和  $E_3$ ， $E_1$ 、 $E_2$  和  $E_3$  定义如下。

$E_1$ ：当  $u[0] \neq v[0]$  时， $u[s+t:1] = v[s+t:1]$ 。

$E_2$ ：当  $u[0] = v[0] = 0$  时， $u[t:1] = v[t:1]$ ，存在一个正整数  $l$ ， $s+t \geq l \geq t+1$ ，有  $u[s+t:l] = v[s+t:l]$ ， $u[l-1] \neq v[l-1]$ ，如果  $l-t$  是偶数，那么， $u[l-2] = v[l-2]$ ， $u[t+2i+2:t+2i+1] \sim v[t+2i+2:t+2i+1]$ ，其中， $\lfloor \frac{l-t-1}{2} \rfloor > i \geq 0$ 。

$E_3$ ：当  $u[0] = v[0] = 1$  时， $u[s+t:t+1] = v[s+t:t+1]$ ，存在着一个正整数  $l$ ， $t \geq l \geq 1$ ，有  $u[t:l] = v[t:l]$ ， $u[l-1] \neq v[l-1]$ ，如果  $l-1$  是偶数，那么， $u[l-2] = v[l-2]$ ， $u[2i+2:2i+1] \sim v[2i+2:2i+1]$ ，其中， $\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor > i \geq 0$  <sup>[9]</sup>。

由  $ECQ(s, t)$  的定义可知  $|V(ECQ(s, t))| = 2^{s+t+1}$ ，其中，符号“ $\parallel$ ”表示元素的基数（个数）。 $|E(ECQ(s, t))| = (s+t+2)2^{s+t-1}$ ，其中，属于  $E_1$  的边有  $2^{s+t}$  条，属于  $E_2$  的边有  $t \times 2^{s+t-1}$  条，属于  $E_3$  的边有  $s \times 2^{s+t-1}$  条。

$ECQ(1, 1)$ 、 $ECQ(1, 2)$  和  $ECQ(2, 2)$  的拓扑结构如图 1~图 3 所示，其中，虚线表示  $E_1$  边，粗实线表示  $E_2$  边，细实线表示  $E_3$  边。

$ECQ(s, t)$  具有以下性质定理。

**引理 1**<sup>[9]</sup>  $ECQ(s, t)$  的所有节点中  $c$  位置取值为 0 的节点的度为  $s+1$ ， $c$  位置取值为 1 的节点的度为  $t+1$ 。因此， $t \geq s \geq 1$  时， $\delta(ECQ(s, t)) = s+1$ ， $\delta(ECQ(s, t))$  表示图  $ECQ(s, t)$  的度。

**引理 2**<sup>[9]</sup>  $ECQ(s, t)$  可以划分成 2 个  $ECQ(s-1, t)$  或  $ECQ(s, t-1)$ 。

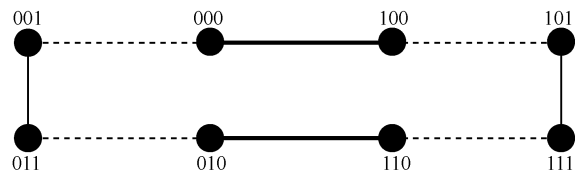


图 1  $ECQ(1, 1)$  拓扑结构

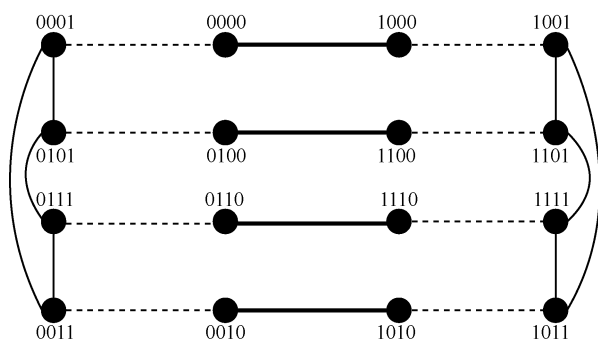


图 2  $ECQ(1, 2)$  拓扑结构

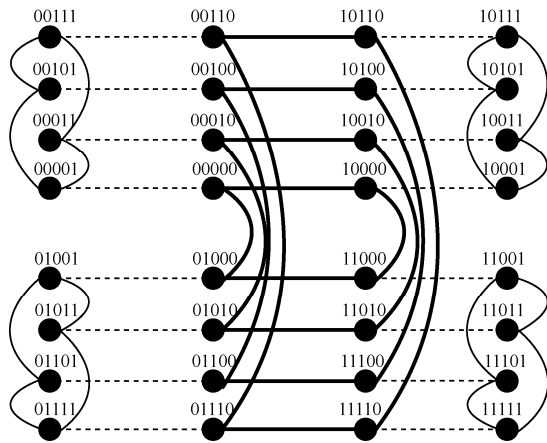


图3 ECQ(2,2) 拓扑结构

由引理2可以将 $ECQ(s,t)$ 划分为2个 $ECQ(s-1,t)$ ，分别表示为 $L$ 和 $R$ ，其中， $V(L) = \{0a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 c\}$ ， $V(R) = \{1a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 c\}$ <sup>[19]</sup>。进一步把 $V(L)$ 分为 $A$ 和 $B$ 2个节点集合，把 $V(R)$ 分为 $C$ 和 $D$ 2个节点集合， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 的表达式如下所示。

$$A = \{0a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 0 \mid a_i, b_j \in \{0,1\}, i \in [0, s-2], j \in [0, t-1]\}$$

$$B = \{0a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 1 \mid a_i, b_j \in \{0,1\}, i \in [0, s-2], j \in [0, t-1]\}$$

$$C = \{1a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 0 \mid a_i, b_j \in \{0,1\}, i \in [0, s-2], j \in [0, t-1]\}$$

$$D = \{1a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 1 \mid a_i, b_j \in \{0,1\}, i \in [0, s-2], j \in [0, t-1]\}$$

由 $E_2$ 的定义可知，节点集合 $A$ 中不同节点间的边属于 $E_2$ 。同理，节点集合 $B$ 中不同节点间的边属于 $E_3$ ，节点集合 $C$ 中不同节点间的边属于 $E_2$ ，节点集合 $D$ 中不同节点间的边属于 $E_3$ <sup>[19]</sup>。同时， $A$ 和 $B$ 之间、 $A$ 和 $C$ 之间、 $C$ 和 $D$ 之间都是完美匹配<sup>[19]</sup>。 $A$ 和 $B$ 之间、 $C$ 和 $D$ 之间的边属于 $E_1$ ， $A$ 和 $C$ 之间的边属于 $E_2$ <sup>[19]</sup>，如图4所示。

引理3<sup>[9]</sup>  $ECQ(s,t) \cong ECQ(t,s)$ ，其中，符号 $\cong$ 表示同构。

引理4<sup>[9]</sup>  $ECQ(s,t)$ 可划分为 $2^s$ 个 $CQ_t$ 和 $2^t$ 个 $CQ_s$ ，其中， $CQ_t$ 和 $CQ_s$ 分别表示 $t$ 维和 $s$ 维的交叉立方网络。

由 $ECQ(s,t)$ 的定义可知，当 $c=0$ 且 $b_{t-1} \cdots b_0$ 位置的取值相同时，共有 $2^s$ 个节点，这些节点以及节点之间的边可以组成一个 $CQ_s$ ，不同 $CQ_s$ 的节点之间互不直接连接。同理，当 $c=1$ 且 $a_{s-1} \cdots a_0$ 位置的取值相同时，共有 $2^t$ 个节点，这些节点以及节点之

间的边可以组成一个 $CQ_t$ ，不同 $CQ_t$ 的节点之间也互不直接连接。

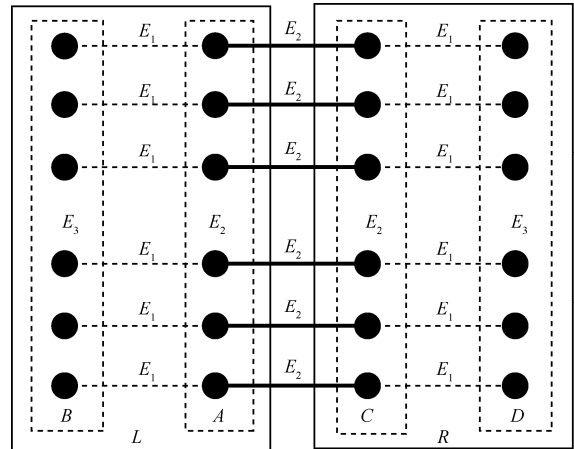


图4 节点集合A、B、C、D示意

引理5<sup>[19]</sup>  $k(ECQ(s,t)) = s+1$ ， $t \geq s \geq 1$ ，其中， $k(ECQ(s,t))$ 表示 $ECQ(s,t)$ 的点连通度。

### 3 交换交叉立方网络的拓扑性质

本节首先对 $ECQ(s,t)$ 的拓扑结构展开研究，相关的拓扑性质研究成果将为后续针对 $ECQ(s,t)$ 的连通性质和MM模型下的条件诊断度研究提供支撑。

定理2  $ECQ(s,t)$ 的拓扑结构不含节点三角（triangle），即 $ECQ(s,t)$ 中任意的3个节点和它们之间存在的边都不能构成一个长度为3的节点环。

证明 用反证法证明，假设 $ECQ(s,t)$ 中存在一个由 $u$ 、 $v$ 和 $w$ 3个节点组成的节点三角。由于 $A$ 和 $B$ 、 $A$ 和 $C$ 、 $C$ 和 $D$ 都是完美匹配，所以， $u$ 、 $v$ 和 $w$ 这3个节点只能属于 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 和 $D$ 这4个节点集合中任意的一个。

当 $u,v,w \in A$ 时，根据 $A$ 的定义以及 $u$ 、 $v$ 和 $w$ 组成一个节点三角的假设，可以得出 $u[0]=v[0]=w[0]=0$ 且 $u[1:t]=v[1:t]=w[1:t]$ 。由 $ECQ(s,t)$ 的定义可知，当 $c=0$ 且 $b_{t-1} \cdots b_0$ 位置取相同的值时共有 $2^s$ 个节点，这些节点及它们之间的边刚好组成一个 $CQ_s$ ，所以可以确定 $u$ 、 $v$ 和 $w$ 以及这三者之间的边属于同一个 $CQ_s$ 中。由于 $CQ_s$ 不含节点三角<sup>[12]</sup>，所以， $u$ 、 $v$ 和 $w$ 不能构成节点三角，这与假设相矛盾，假设错误。

同理可证 $u,v,w \in B$ 时、 $u,v,w \in C$ 时或 $u,v,w \in D$ 时， $u$ 、 $v$ 和 $w$ 也不能构成节点三角。因此， $ECQ(s,t)$ 的拓扑结构不含节点三角。证毕。

定理3 设节点 $u$ 和节点 $v$ 是 $ECQ(s,t)$ 中任意

的 2 个节点, 则节点  $u$  和节点  $v$  至多只有 2 个共同的邻节点, 表示为  $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$ , 其中,  $N(u) = \{v | u \in V, (u, v) \in E\}$ ,  $N(v) = \{u | v \in V, (v, u) \in E\}$ 。

**证明** 以下根据节点  $u$  和节点  $v$  所在节点集合的不同, 分情况进行说明。

1)  $u, v \in A$  (同理可证  $u, v \in B$ 、 $u, v \in C$  或  $u, v \in D$ )

由于  $u, v \in A$ , 且  $A$  和  $B$  之间以及  $A$  和  $C$  之间都是完美匹配, 所以可知  $N(u) \cap N(v) \subset A$ 。由引理 4 把  $ECQ(s, t)$  分成  $2^s$  个  $CQ_i$  和  $2^t$  个  $CQ_s$ , 且不同  $CQ_s$  的节点之间互不直接连接。当节点  $u$  和节点  $v$  同属一个  $CQ_s$  时, 可知这二者在  $A$  中的邻节点也属于同一个  $CQ_s$ , 由于  $CQ_s$  中任意 2 个不同的节点至多只有 2 个相同的邻节点<sup>[12]</sup>, 所以  $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$ 。当节点  $u$  和节点  $v$  分属不同的  $CQ_s$  时, 节点  $u$  和节点  $v$  在  $b_{i-1} \cdots b_0$  位置上的取值不相同。 $u, v \in A$  表明节点  $u$  和节点  $v$  在  $c$  位置都取值为 0。如果存在着节点  $w$  是节点  $u$  和节点  $v$  的共同邻节点, 那么节点  $w$  在  $c$  位置取值也为 0,  $w$  在  $b_{i-1} \cdots b_0$  位置上的取值与  $u$  一致。同理可知  $w$  在  $b_{i-1} \cdots b_0$  位置上的取值也与  $v$  一致。那么节点  $u$  和节点  $v$  在  $b_{i-1} \cdots b_0$  位置上的取值相同, 这与节点  $u$  和节点  $v$  在  $b_{i-1} \cdots b_0$  位置上的取值不相同的要求相矛盾。所以当节点  $u$  和节点  $v$  不属于同一个  $CQ_s$  时  $|N(u) \cap N(v)| = 0$ 。因此,  $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$ 。

2)  $u$  和  $v$  分属  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  中任意 2 个不同的节点集合

①  $u \in A$  且  $v \in B$  (同理可证  $u \in A$  且  $v \in C$  或  $u \in C$  且  $v \in D$ )

如果  $(u, v) \in E(ECQ(s, t))$ , 由于  $ECQ(s, t)$  不包含节点三角, 且  $A$  和  $B$  之间是完美匹配, 所以  $|N(u) \cap N(v)| = 0$ 。而当  $(u, v) \notin E(ECQ(s, t))$  时, 设节点  $u' = N(u) \cap B$ , 节点  $v' = N(v) \cap A$ 。由于  $A$ 、 $B$  之间完美匹配, 所以节点  $u$  和节点  $v$  至多存在 2 个相同的邻节点  $u'$  和  $v'$ , 所以,  $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$ 。

②  $u \in B$  且  $v \in C$  (同理可证  $u \in A$  且  $v \in D$ )

这种情况下只有当节点  $u$  和节点  $v$  在同一条水平直线时才可能有共同的邻节点, 有且只有一个。

③  $u \in B$  且  $v \in D$

这种情况下节点  $u$  和节点  $v$  不存在共同的邻节点。因此,  $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$ , 证毕。

**定理 4** 设节点  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  是  $ECQ(s, t)$  的 4 个节点, 其中,  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $c \in B$ ,  $d \in A$  (或  $a \in C$ ,

$b \in D$ ,  $c \in D$ ,  $d \in C$ )。那么,  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  以及它们之间的边不能构成一个长度为 4 的环。

**证明** 用反证法证明, 当  $a \in A$ 、 $b \in B$ 、 $c \in B$ 、 $d \in A$  时, 假设  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  可以构成一个长度为 4 的环, 如图 5 所示。设节点  $a = \{0a_{s-2} \cdots a_0 b_{i-1} \cdots b_0 0\}$ , 由  $E_1$  的定义可知  $b = \{0a_{s-2} \cdots a_0 b_{i-1} \cdots b_0 1\}$ , 又由  $E_3$  的定义可以得出  $c = \{0a_{s-2} \cdots a_0 d_{i-1} \cdots d_0 1\}$ , 其中,  $d_{i-1} \cdots d_0$  和  $b_{i-1} \cdots b_0$  至少有一个位置的取值不同。接下来, 根据  $E_1$  的定义可以得出  $d = \{0a_{s-2} \cdots a_0 d_{i-1} \cdots d_0 0\}$ 。由于  $d_{i-1} \cdots d_0$  和  $b_{i-1} \cdots b_0$  中至少有一个位置的取值不同, 所以节点  $a$  和节点  $d$  之间不邻接。这与假设矛盾, 所以假设错误。同理可证当  $a \in C$ ,  $b \in D$ ,  $c \in D$ ,  $d \in C$  时  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  也不能构成一个长度为 4 的环。

证毕。

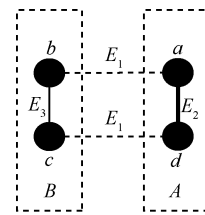


图 5  $a \in A$ 、 $b \in B$ 、 $c \in B$ 、 $d \in A$  的 4 节点环

**定理 5** 设节点  $u$  和节点  $v$  是  $ECQ(s, t)$  中 2 个任意的节点, 其中,  $u \in A$ 、 $v \in A$ , 那么  $N[u]$  和  $N[v]$  至多只出现在 2 条相同的水平直线中, 其中,  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$ ,  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ 。

**证明** 当  $(u, v) \in E(ECQ(s, t))$  时, 由定理 2 可知  $ECQ(s, t)$  不含节点三角, 所以可知  $N[u] \cap N[v] = \{u, v\}$ , 又由于  $A$  和  $B$  之间以及  $A$  和  $C$  之间都是完美匹配, 所以  $N[u]$  和  $N[v]$  至多只出现在 2 条相同的水平直线中, 如图 6(a) 中的浅色直线所示。

当  $(u, v) \notin E(ECQ(s, t))$  时, 由定理 3 可知  $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$ 。因此,  $N[u]$  和  $N[v]$  至多只出现在 2 条相同的水平直线中, 如图 6(b) 中的浅色直线所示。

证毕。

**定理 6** 设节点  $u$  和节点  $v$  是  $ECQ(s, t)$  中 2 个任意的节点, 其中,  $u \in A$ 、 $v \in B$ , 那么  $N[u]$  和  $N[v]$  至多只出现在一条相同的水平直线中。

**证明** 当  $(u, v) \in E(ECQ(s, t))$  时, 由定理 2 可知  $ECQ(s, t)$  不含节点三角, 所以可知  $N[u] \cap N[v] = \{u, v\}$ 。又根据定理 4 可知  $A$ 、 $B$  之间不存长度为 4 的节点环。因此,  $N[u]$  和  $N[v]$  至多只出现在一条相同的水平直线中, 即  $u$  和  $v$  所在的水平直线, 如图 7(a) 中的浅色直线所示。

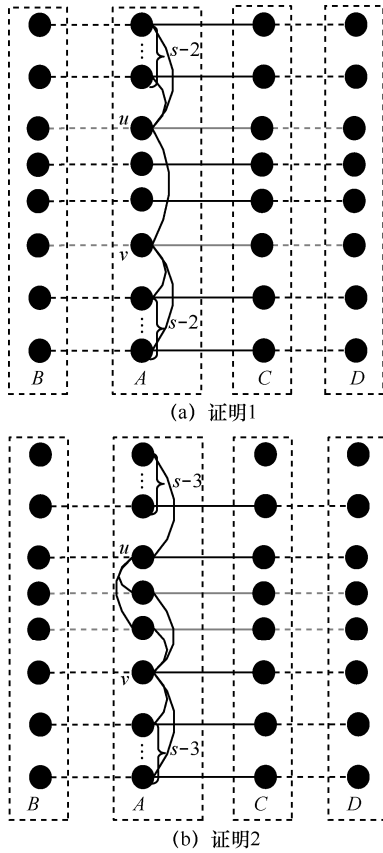


图 6 定理 5 证明示意

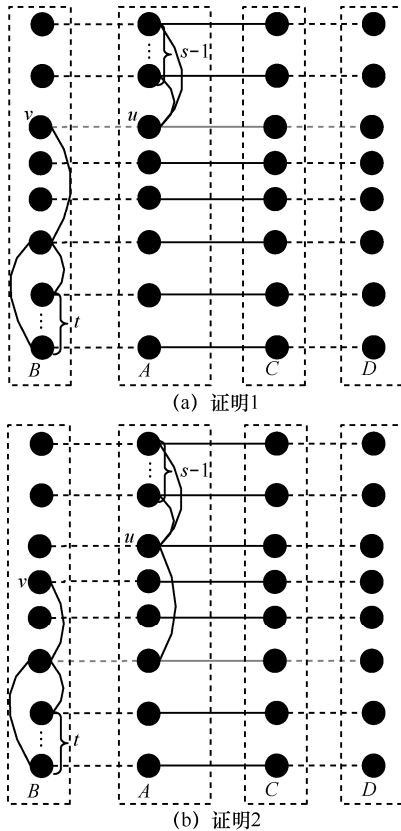


图 7 定理 6 证明示意

当  $(u, v) \notin E(ECQ(s, t))$  时, 根据  $ECQ(s, t)$  的定义和节点集合  $A$  的定义可知,  $N[u] \cap A$  中的所有节点在  $b_{t-1} \cdots b_0$  位置的取值都相同。而  $N[v] \cap B$  中的所有节点在  $b_{t-1} \cdots b_0$  位置的取值都不相同, 因此, 可知  $N[v] \cap B$  中最多只有一个节点与  $N[u] \cap A$  中的节点在  $b_{t-1} \cdots b_0$  位置的取值一致。由于  $A$  和  $B$  之间是完美匹配, 因此  $N[v] \cap B$  中的节点与  $N[u] \cap A$  中的节点最多只出现在一条相同的水平直线上。所以,  $N[u]$  和  $N[v]$  至多只出现在一条相同的水平直线中, 如图 7(b) 中的浅色直线所示。

证毕。

#### 4 交换交叉立方网络的连通性质

本节利用  $ECQ(s, t)$  的拓扑性质对  $ECQ(s, t)$  在各种情况下的连通性质展开研究, 得出一系列连通性质定理。本节的研究与后续开展的条件诊断度研究之间存在着紧密的前后件关系。

**定理 7** 设节点  $u$  是  $ECQ(s, t)$  中任意的一个节点, 则连通度  $k(ECQ(s, t) - N[u]) = s - 1$ , 其中,  $t \geq s \geq 2$ 。

**证明** 用数学归纳法证明。当  $t = s = 2$  时, 如图 3 可知  $k(ECQ(2, 2) - N[u]) = 1 = s - 1$ , 所以  $t = s = 2$  时定理 7 成立。假设  $k(ECQ(s - 1, t) - N[u]) = (s - 1) - 1$  也成立, 那么接下来说明  $k(ECQ(s, t) - N[u]) = s - 1$  是否成立, 要求  $t \geq s > 2$ 。

设  $F$  是  $ECQ(s, t) - N[u]$  中任意的一个节点集合, 要求  $|F| = s - 2$ 。由引理 2 把  $ECQ(s, t)$  划分为 2 个  $ECQ(s - 1, t)$ , 分别表示为  $L$  和  $R$ , 其中,  $V(L) = \{0a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 c\}$ ,  $V(R) = \{1a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 c\}$ , 设  $F_0 = F \cap L$ ,  $F_1 = F \cap R$ , 如果  $ECQ(s, t) - N[u] - F$  始终连通, 那么表示  $ECQ(s, t) - N[u]$  的连通度要大于  $|F|$ , 也就证明了  $k(ECQ(s, t) - N[u]) > s - 2$ 。不失一般性, 设  $u \in V(L)$ , 接下来分 2 种情况进行证明。

1)  $|F_0| = s - 2$  且  $|F_1| = 0$  (同理可证  $|F_0| = 0$  且  $|F_1| = s - 2$ )

由于  $|F_1| = 0$ , 所以  $R - (N(u) \cap C) - F_1$  连通。设节点  $x$  是  $L - N[u] - F_0$  中任意的一个节点, 表示为  $x \in V(L - N[u] - F_0)$ 。以下进一步分 2 种子情况进行说明。

①  $x \in A$

因为  $|F_1| = 0$  并且  $x \in V(L - N[u] - F_0)$ , 所以  $N(x) \cap C \not\subset (N(u) \cap C) \cup F_1$ 。因此, 节点  $x$  可以通过

边  $(x, N(x) \cap C)$  与  $R - (N(u) \cap C) - F_1$  连通。

②  $x \in B$

当  $u \in A$  时, 根据定理 6 可知,  $N[u]$  和  $N[x]$  至多只出现在一条相同的水平直线中。要使节点  $x$  与  $R - (N(u) \cap C) - F_1$  不连通, 那么  $N[x]$  对应的  $t+1$  条水平直线中都至少要有一个节点属于  $N[u] \cup F$ 。由于  $N[u]$  和  $N[x]$  至多只出现在一条相同的水平直线, 所以其他水平直线 (至少  $t$  条) 中的每一条水平直线都至少有一个节点属于  $F$ 。因此,  $|F| \geq t \geq s$ , 这与条件  $|F| = s-2$  相矛盾。所以节点  $x$  与  $R - (N(u) \cap C) - F_1$  连通。

当  $u \in B$  时, 根据定理 5 可知  $N[u]$  和  $N[x]$  至多只出现在 2 条相同的水平直线中。同理可得  $|F| \geq t-1 \geq s-1$ , 这也与条件  $|F| = s-2$  相矛盾。所以节点  $x$  与  $R - (N(u) \cap C) - F_1$  连通。

2)  $|F_0| \leq s-3$  且  $|F_1| \leq s-3$

根据数学归纳法的假设可知  $k(L - N[u]) = s-2$ 、 $k(R - N[u]) = s-2$ 。所以,  $L - N[u] - F_0$  和  $R - N[u] - F_1$  连通。如图 4 所示,  $L$  和  $R$  之间存在着  $2^{s+t-1}$  条边。因此, 可知  $L - N[u]$  和  $R - N[u]$  之间至少存在  $2^{s+t-1} - s$  条边。由  $t \geq s \geq 2$  可推导出  $2^{s+t-1} - s > s-2 = |F|$ , 那么表示至少存在一条从  $L - N[u] - F_0$  到  $R - N[u] - F_1$  的边。因此,  $L - N[u] - F_0$  与  $R - N[u] - F_1$  连通,  $ECQ(s, t) - N[u] - F$  连通。

由以上 2 种情况可知,  $ECQ(s, t) - N[u] - F$  连通, 因此,  $k(ECQ(s, t) - N[u]) > |F| = s-2$ , 其中,  $t \geq s > 2$ 。由  $ECQ(s, t)$  的定义以及不同节点间至多只有 2 个共同的邻节点的性质可以推导出  $k(ECQ(s, t) - N[u]) \leq \delta(ECQ(s, t) - N[u]) = s-1$ 。因此,  $k(ECQ(s, t) - N[u]) = s-1$ 。证毕。

**定理 8** 设  $(u, v)$  是  $ECQ(s, t)$  中任意的一条边, 那么连通度  $k(ECQ(s, t) - N[u, v]) \geq s-2$ , 其中,  $t \geq s \geq 2$ ,  $N[u, v] = N[u] \cup N[v]$ 。

**证明** 用数学归纳法证明。当  $t = s = 2$  时, 如图 3 所示, 可知  $k(ECQ(2, 2) - N[u, v]) = 1 > s-2$ , 所以  $t = s = 2$  时定理 8 成立。假设  $ECQ(s-1, t)$  也满足定理 8, 那么下面证明  $k(ECQ(s, t) - N[u, v]) \geq s-2$  是否成立, 其中,  $t \geq s > 2$ 。

设  $F$  是  $ECQ(s, t) - N[u, v]$  中任意的一个节点集合, 且满足  $|F| \leq s-3$ 。同样把  $ECQ(s, t)$  划分为 2 个  $ECQ(s-1, t)$ , 分别表示为  $L$  和  $R$ , 其中,

$V(L) = \{0a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 c\}$ ,  $V(R) = \{1a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 c\}$ , 设  $F_0 = F \cap L$ ,  $F_1 = F \cap R$ 。如果能证明对于任意满足  $|F| \leq s-3$  的节点集合  $F$ ,  $ECQ(s, t) - N[u, v] - F$  都保持连通, 那么,  $k(ECQ(s, t) - N[u, v]) > s-3$ , 即  $k(ECQ(s, t) - N[u, v]) \geq s-2$  可证。以下根据节点  $u$  和节点  $v$  的所属位置分 2 种情况进行证明。

1)  $u \in V(L)$  且  $v \in V(R)$  (同理可证  $u \in V(R)$  且  $v \in V(L)$ )

由于  $(u, v)$  是  $ECQ(s, t)$  中任意的一条边, 所以必然有  $u \in A$ 、 $v \in C$ 。由定理 7 可知  $k(L - N[u]) = s-2$ ,  $k(R - N[v]) = s-2$ 。由于  $|F_0| + |F_1| = |F| \leq s-3$ , 所以  $L - N[u] - F_0$  和  $R - N[v] - F_1$  都连通。根据  $ECQ(s, t)$  的划分性质可知  $L - N[u]$  和  $R - N[v]$  之间至少存在  $2^{s+t-1} - 2t$  条边。由  $t \geq s > 2$  可推导出  $2^{s+t-1} - 2t > s-3 \geq |F|$ , 所以至少存在一条边  $\{x, \bar{x}\}$ , 其中,  $x \in V(L) - N[u] - F_0$ ,  $\bar{x} \in V(R) - N[v] - F_1$ 。所以  $L - N[u] - F_0$  和  $R - N[v] - F_1$  连通。因此,  $ECQ(s, t) - N[u, v] - F$  连通。

2)  $u, v \in V(L)$  (同理可证  $u, v \in V(R)$ )

①  $|F_0| \leq s-4$  且  $|F_1| \geq 1$

根据数学归纳法的假设可知  $k(L - N[u, v]) \geq s-3$ 。由于  $|F_0| \leq s-4$ , 那么  $L - N[u, v] - F_0$  连通。接下来根据  $u$  和  $v$  所属位置的不同分 3 种子情况进一步说明。

a)  $u \in A$  且  $v \in A$

设  $u_c = N(u) \cap C$ ,  $v_c = N(v) \cap C$ , 由于  $|F_1 \cup \{u_c, v_c\}| \leq |F| + 2 \leq s-3+2 = s-1$ , 而  $k(R) = s$ , 所以  $R - F_1 - \{u_c, v_c\}$  连通。同样根据  $ECQ(s, t)$  的划分性质可知,  $L - N[u, v]$  和  $R - \{u_c, v_c\}$  之间至少存在着  $2^{s+t-1} - 2s + 2$  条边。由  $t \geq s > 2$  可推导出  $2^{s+t-1} - 2s + 2 > s-3 \geq |F|$ , 所以至少存在一条边  $\{x, \bar{x}\}$ , 其中,  $x \in V(L) - N[u, v] - F_0$ ,  $\bar{x} \in V(R) - \{u_c, v_c\} - F_1$ 。所以,  $L - N[u, v] - F_0$  和  $R - \{u_c, v_c\} - F_1$  连通, 因此,  $ECQ(s, t) - N[u, v] - F$  连通。

b)  $u \in A$  且  $v \in B$  (同理可证  $u \in B$  且  $v \in A$ )

设  $u_c = N(u) \cap C$ , 由于  $|F_1 \cup \{u_c\}| \leq |F| + 1 \leq s-3+1 = s-2$ , 而  $k(R) = s$ , 所以  $R - F_1 - \{u_c\}$  连通。同样根据  $ECQ(s, t)$  的划分性质可知  $L - N[u, v]$  和  $R - \{u_c\}$  之间至少存在  $2^{s+t-1} - s$  条边。由  $t \geq s > 2$  可推导出  $2^{s+t-1} - s > s-3 \geq |F|$ , 所以至少存在一条边  $\{x, \bar{x}\}$ , 其中,  $x \in V(L) - N[u, v] - F_0$ ,  $\bar{x} \in V(R) -$

$\{u_c\} - F_1$ 。所以  $L - N[u, v] - F_0$  和  $R - F_1 - \{u_c\}$  连通，因此  $ECQ(s, t) - N[u, v] - F$  连通。

c)  $u \in B$  且  $v \in B$

由于  $|F_1| \leq |F| \leq s - 3$ ，而  $k(R) = s$ ，所以  $R - F_1$  连通。同样根据  $ECQ(s, t)$  的划分性质可知  $L - N[u, v]$  和  $R$  之间至少存在  $2^{s+t-1} - 2$  条边。由于  $2^{s+t-1} - 2 > s - 3 \geq |F|$ ，所以至少存在一条边  $\{x, \bar{x}\}$ ，其中， $x \in V(L) - N[u, v] - F_0$ ， $\bar{x} \in V(R) - F_1$ 。所以  $L - N[u, v] - F_0$  和  $R - F_1$  连通，因此， $ECQ(s, t) - N[u, v] - F$  连通。

②  $|F_0| = s - 3$  且  $|F_1| = 0$

由于  $k(R) = s > 2$ ，并且  $|N(u) \cap C| \leq 1$ ， $|N(v) \cap C| \leq 1$ ，所以  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  连通。以下就  $L - N[u, v] - F_0$  中的任意一个节点  $x$  是否与  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  连通分情况进行说明。

a)  $x \in A$

由于  $x \in L - N[u, v] - F_0$ ，所以  $x \notin N[u, v]$ 。设  $x_c = x \cap C$ ，可知  $x_c \notin N[u, v]$  并且  $x_c \in R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$ 。因此，节点  $x$  可以通过边  $(x, x_c)$  与  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  连通。

b)  $x \in B$

接下来根据边  $(u, v)$  所处的位置进一步分 3 种情况进行说明。

**情况 1**  $u \in A$  且  $v \in A$

如图 8 所示，根据  $ECQ(s, t)$  的定义和节点集合  $A$  的定义可知  $N[u, v]$  中的节点在  $b_{t-1} \cdots b_0$  位置上的取值都一致。而  $N[x] \cap B$  中的所有节点在  $b_{t-1} \cdots b_0$  位置的取值都不相同，因此，可知  $N[x] \cap B$  中最多只有一个节点与  $N[u, v]$  中的节点在  $b_{t-1} \cdots b_0$  位置取值一致。由于  $A$  与  $B$  之间是完美匹配，因此， $N[x]$  中的节点与  $N[u, v]$  中的节点最多只会出现在一条相同的水平直线上。由于  $N[x]$  分属  $t+1$  条水平直线，所以要使节点  $x$  无法与  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  连通就要求  $N[x]$  分属的  $t+1$  条水平直线中的每一条水平直线在节点集合  $A$  与节点集合  $B$  中都至少有一个节点属于  $N[u, v] \cup F$ 。已经证得  $N[x]$  中的节点与  $N[u, v]$  中的节点最多只会出现在一条相同的水平直线上，所以要求区域  $P$  中存在的至少  $t$  条水平直线中的每一条都至少有一个节点属于  $F_0$ 。所以  $|F_0| \geq t \geq s$ ，这与  $|F_0| = s - 3$  的条件相矛盾。因此，节点  $x$  与  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  连通。

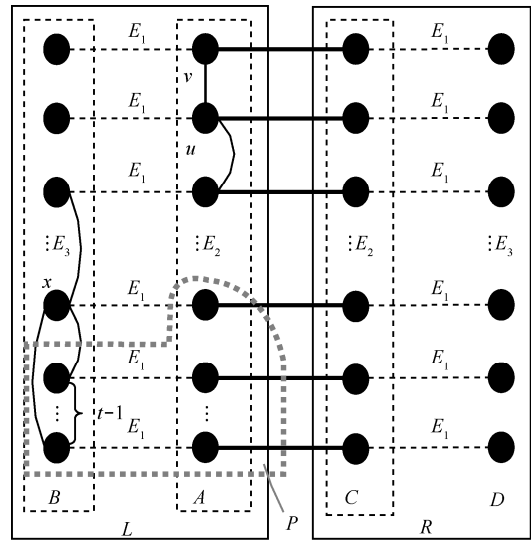


图 8 定理 8 情况 1 证明示意

**情况 2**  $u \in A$  且  $v \in B$  (同理可证  $u \in B$  且  $v \in A$ )

由定理 6 可知  $N[x]$  和  $N[u]$  至多只出现在一条相同的水平直线中。根据定理 3 可知  $|N(x) \cap N(v)| \leq 2$ ，所以要使节点  $x$  无法与  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  连通就要求  $N[x]$  分属的  $t+1$  条水平直线中的每一条水平直线在节点集合  $A$  与节点集合  $B$  中都至少有一个节点属于  $N[u, v] \cup F_0$ ，其中， $N(v) \cap C = \emptyset$ ，如图 9 所示。所以要求区域  $P$  中存在的至少  $t-2$  条水平直线中的每一条都至少有一个节点属于  $F_0$ 。因此， $|F_0| \geq t - 2 \geq s - 2$ ，这与  $|F_0| = s - 3$  的条件相矛盾。所以，节点  $x$  与  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  连通。

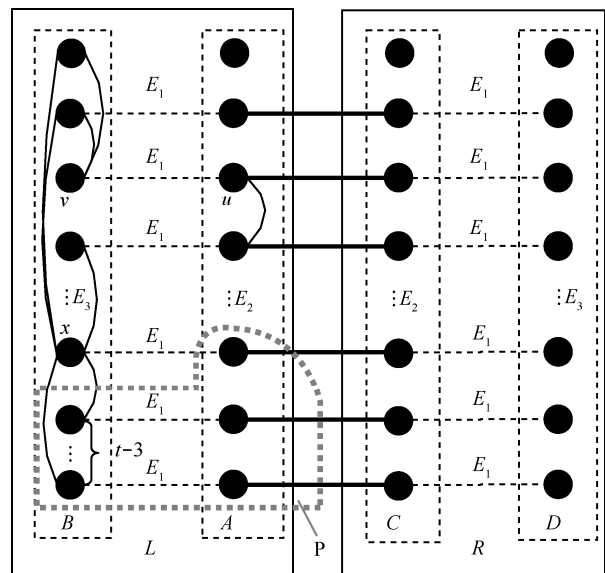


图 9 定理 8 情况 2 证明示意

**情况 3**  $u \in B$  且  $v \in B$

根据定理 3 可知  $|N(x) \cap N(u)| \leq 2$ 、 $|N(x) \cap N(v)| \leq 2$ 。当  $|N(x) \cap N(u)| \geq 1$  并且  $|N(x) \cap N(v)| \geq 1$  时, 根据  $ECQ(s, t)$  的定义和引理 4 可知,  $x, u, v, N(x) \cap B, N(u) \cap B, N(v) \cap B$  以及这些节点之间的边都属于  $ECQ(s, t)$  划分而成的同一个  $CQ_i$ 。如果  $|N(x) \cap N(u)| = 2$  并且  $|N(x) \cap N(v)| = 2$ , 设  $N(x) \cap N(u) = \{u', u''\}$ 、 $N(x) \cap N(v) = \{v', v''\}$ , 如图 10(a) 所示, 存在着 2 个包含边  $(u, v)$  且长度为 5 的环  $(u-u'-x-v'-v-u)$  和  $(u-u''-x-v''-v-u)$ 。而根据文献[20]中的定理 3 可知, 当  $n \geq 2$  时, 对于  $CQ_n$  中的任意边  $(u, v)$  和任意正整数  $l$ , 其中,  $4 \leq l \leq 2^n$ ,  $CQ_n$  只存在一条包括边  $(u, v)$  且长度为  $l$  的环。这与存在着 2 个包含边  $(u, v)$  且长度为 5 的环相矛盾, 因此,  $|N(x) \cap N(u)| = 2$  并且  $|N(x) \cap N(v)| = 2$  的情况不存在, 所以可知  $|N(x) \cap N(u, v)| \leq 3$ 。由于  $x \in L - N[u, v] - F_0$  则  $|N[x] \cap N[u, v]| \leq 3$ 。

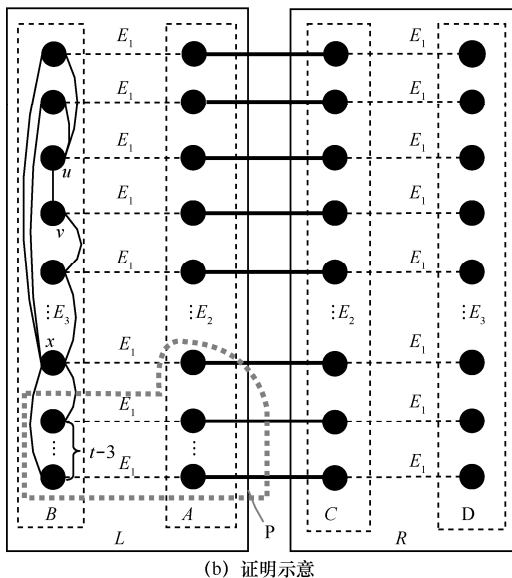
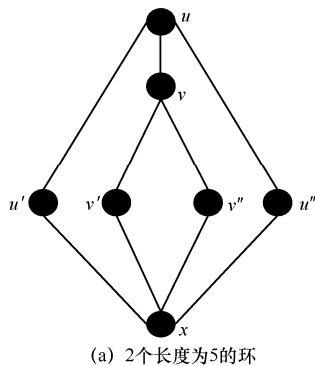


图 10 定理 8 情况 3 证明示意

由于节点集合  $A$  与节点集合  $B$  之间是完美匹配, 所以  $N[x] \cap N[u, v] \subset B$ 。同样, 要使节点  $x$  无法与  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  连通, 就要求  $N[x]$  分属的  $t+1$  条水平直线中的每一条在节点集合  $A$  与节点集合  $B$  中都至少要有有一个节点属于  $N[u, v] \cup F_0$ , 其中,  $N(u) \cap C = \emptyset$ 、 $N(v) \cap C = \emptyset$ , 如图 10(b) 所示。前面已经证明  $|N[x] \cap N[u, v]| \leq 3$  和  $N[x] \cap N[u, v] \subset B$ , 所以要求区域  $P$  中存在的至少  $t-2$  条水平直线中的每一条水平直线都至少要有有一个节点属于  $F_0$ 。因此,  $|F_0| \geq t-2 \geq s-2$ , 这与  $|F_0| = s-3$  的条件相矛盾。所以, 节点  $x$  与  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  连通。

根据情况 1~情况 3 的证明可知,  $x \in B$  且  $x \in L - N[u, v] - F_0$  时的任意节点都与  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  相连通。说明  $L - N[u, v] - F_0$  与  $R - (N(u) \cap C) - (N(v) \cap C)$  连通, 即  $ECQ(s, t) - N[u, v] - F$  连通。

因此, 对于满足  $|F| \leq s-3$  的任意节点集合  $F$ ,  $ECQ(s, t) - N[u, v] - F$  都保持连通。所以,  $k(ECQ(s, t) - N[u, v]) > |F|$ , 即  $k(ECQ(s, t) - N[u, v]) \geq s-2$  可证。

证毕。

**5 交换交叉立方网络在 MM 模型下的条件诊断度**

条件诊断度的计算需要有条件  $t$ -可诊断的判定定理来提供支撑, 通常的做法是利用定理 1 的可区分性来进行条件  $t$ -可诊断的判定, 本文同样如此。本节首先引入定理 9 的 3 个条件来作为可区分性的判定规则。

**定理 9**<sup>[21]</sup> 对于系统  $G$  中任意的 2 个节点集合  $F_0$  和  $F_1$ ,  $F_0$  和  $F_1$  可区分当且仅当满足以下 3 个条件之一, 如图 11 所示。

- 1) 存在  $u, v, w$  这 3 个节点, 其中,  $u, w \in V(G) - (F_0 \cup F_1)$ ,  $v \in F_0 \Delta F_1$ , 使  $(u, v)_w \in L$ ;
- 2) 存在  $u, v, w$  这 3 个节点, 其中,  $u, v \in F_0 - F_1$ ,  $w \in V(G) - (F_0 \cup F_1)$ , 使  $(u, v)_w \in L$ 。
- 3) 存在  $u, v, w$  这 3 个节点, 其中,  $u, v \in F_1 - F_0$ ,  $w \in V(G) - (F_0 \cup F_1)$ , 使  $(u, v)_w \in L$ 。

接下来本节推导出对于交换交叉立方网络在 MM 模型下的条件诊断度研究有着重要作用的 2 个连通性定理——定理 10 和定理 11。

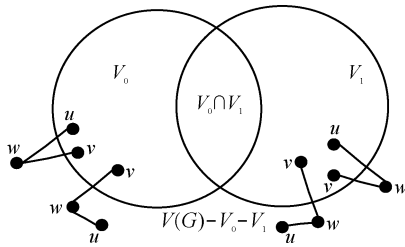


图 11 定理 9 证明示意

**定理 10** 设  $F$  是  $ECQ(s, t)$  的一个节点集合，且  $|F| \leq 2s - 1$ ，则至少满足以下 2 个条件之一。

1)  $ECQ(s, t) - F$  连通；

2)  $ECQ(s, t) - F$  不连通，有且只有 2 个连通分支，其中之一是平凡分支，另一个是非平凡分支。

**证明** 同样把  $ECQ(s, t)$  划分为 2 个  $ECQ(s - 1, t)$ ，分别表示为  $L$  和  $R$ ，其中， $V(L) = \{0a_{s-2} \dots a_0 b_{t-1} \dots b_0 c\}$ ， $V(R) = \{1a_{s-2} \dots a_0 b_{t-1} \dots b_0 c\}$ ， $L \cong ECQ(s - 1, t)$ ， $R \cong ECQ(s - 1, t)$ 。设  $F_0 = F \cap L$ ， $F_1 = F \cap R$ 。由于  $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ ，且  $|F| \leq 2s - 1$ ，所以必然存在  $|F_0| \leq s - 1$  或  $|F_1| \leq s - 1$ 。不失一般性，设  $|F_1| \leq s - 1$ 。由于  $k(R) = s$ ，则  $R - F_1$  连通。设节点  $u$  是  $L - F_0$  中任意的一个节点，接下来根据节点  $u$  的 2 种情况进行说明。

1) 存在节点  $u$  使  $N(u) \subset F$

设节点  $v$  是  $L - F_0 - \{u\}$  中任意的一个节点，则根据节点  $v$  的所处位置进一步分  $v \in A$  和  $v \in B$  2 种子情况进行说明。

①  $v \in A$

设节点  $v' = N(v) \cap C$ 。当  $v' \notin F_1$  时，节点  $v$  可通过边  $(v, v')$  与  $R - F_1$  连通。而当  $v' \in F_1$  时，假设  $N(u) \subset F$ ，那么  $|F| \geq |N(u) \cup N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cap N(v)| \geq s + 1 + s + 1 - 2 = 2s$ ，这与  $|F| \leq s - 1$  的已知条件相矛盾。因此，可知  $N(v) \not\subset F$ ，又由于  $v' \in F_1$ ，所以  $N(v) \cap (A \cup B) \not\subset F_0$ 。接下来分 2 种情况进一步说明。

a)  $N(v) \cap B \not\subset F_0$

设  $\bar{v} = N(v) \cap B$ ，根据  $ECQ(s, t)$  的定义可知节点  $v$  有  $s - 1$  个邻节点位于节点集合  $A$ ，节点  $\bar{v}$  有  $t$  个邻节点位于节点集合  $B$ ，如图 12 所示。由定理 6 可知  $N[\bar{v}]$  和  $N[v]$  至多只出现在一条相同的水平直线中，就是  $\bar{v}$  和  $v$  所在的水平直线，也就表明节点  $v$  在节点集合  $A$  中的邻节点和节点  $\bar{v}$  在节点集合  $B$  中的邻节点彼此分属不同的水平直线。此时要使节点  $v$  与  $R - F_1$  不连通，那么区域  $P$  和区域  $Q$  中每一

条水平直线都至少有一个节点属于  $F$ 。可知一共有  $s - 1 + 1 + t$  条水平直线，所以  $|F| \geq s - 1 + 1 + t \geq 2s$ 。这与条件  $|F| \leq 2s - 1$  相矛盾。因此， $v$  与  $R - F_1$  连通。

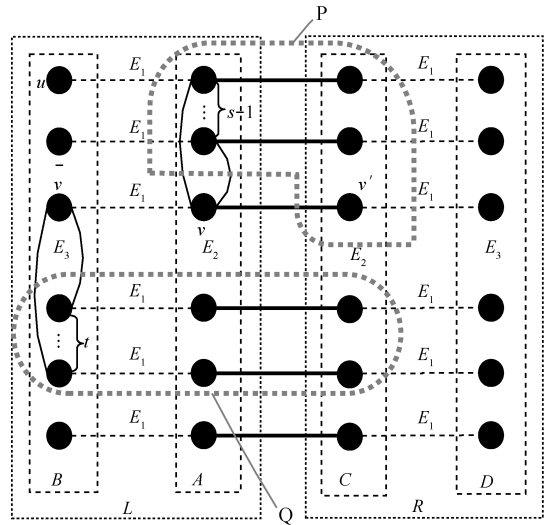


图 12 定理 10 中  $N(v) \cap B \not\subset F_0$  情况证明示意

b)  $N(v) \cap B \subset F_0$

由于  $N(v) \cap (A \cup B) \not\subset F_0$ ，那么  $N(v) \cap A \not\subset F_0$ 。设  $\bar{v} = (N(v) \cap A) - F_0$ 。如图 13 所示，可知节点  $v$  有  $s - 2$  个邻节点属于节点集合  $A$ （不包括节点  $\bar{v}$ ），并且节点  $\bar{v}$  有  $s - 2$  个邻节点属于节点集合  $A$ （不包括节点  $v$ ）。由于  $ECQ(s, t)$  的拓扑结构不含节点三角，所以  $|N(v) \cap N(\bar{v})| = 0$ 。此时要使节点  $v$  与  $R - F_1$  不连通，那么区域  $P$  中的每一条水平直线都至少有一个节点属于  $F$ 。因此，当  $N(\bar{v}) \cap B \subset F$  时  $|F| \geq s - 2 + 1 + s - 2 + 1 + |N(v) \cap B| + |N(\bar{v}) \cap B| = 2s$ ，这与  $|F| \leq 2s - 1$  的条件相矛盾。而  $N(\bar{v}) \cap B \not\subset F$  时

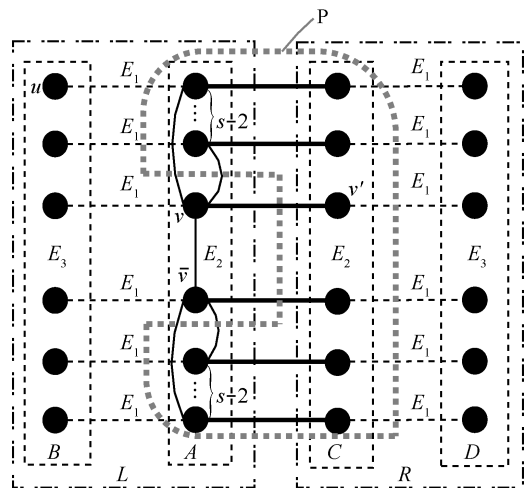


图 13 定理 10 中  $N(v) \cap B \subset F_0$  情况证明示意

可采用情况 a) 的证明方法证得  $|F| \geq 2s$ ，这也与  $|F| \leq 2s-1$  的条件相矛盾。因此， $v$  与  $R-F_1$  连通。

②  $v \in B$

设节点  $v' = N(v) \cap A$ 。当  $v' \notin F$  时，采用情况 a) 的证明方法可以证得  $|F| \geq 2s$ ，这与  $|F| \leq 2s-1$  的条件相矛盾。

当  $v' \in F$  时，假设  $N(v) \subset F$ ，那么  $|F| \geq |N(u) \cup N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cap N(v)| \geq s+1+s+1-2=2s$ ，这与  $|F| \leq 2s-1$  的已知条件相矛盾。因此， $N(v) \not\subset F$ ，即  $N(v) \cap (A \cup B) \not\subset F$ 。由于  $v' \in F$ ，所以  $N(v) \cap B \not\subset F$ ，设  $\bar{v}$  是  $N(v) \cap B$  中不属于  $F$  的任意一个节点。如图 14 所示，节点  $v$  有  $t-1$  个邻节点属于节点集合  $B$ （不包括节点  $\bar{v}$ ），并且节点  $\bar{v}$  有  $t-1$  个邻节点属于节点集合  $B$ （不包括节点  $v$ ）。由于  $ECQ(s,t)$  的拓扑结构中不包含节点三角，所以  $|N(v) \cup N(\bar{v})| = 0$ 。如果节点  $v$  与  $R-F_1$  不连通，那么区域  $P$  中的任意一条水平直线都至少有一个节点属于  $F$ 。因此， $|F| \geq t-1+1+t-1+1=2t \geq 2s$ ，这与  $|F| \leq 2s-1$  的条件相矛盾。因此， $v$  与  $R-F_1$  连通。

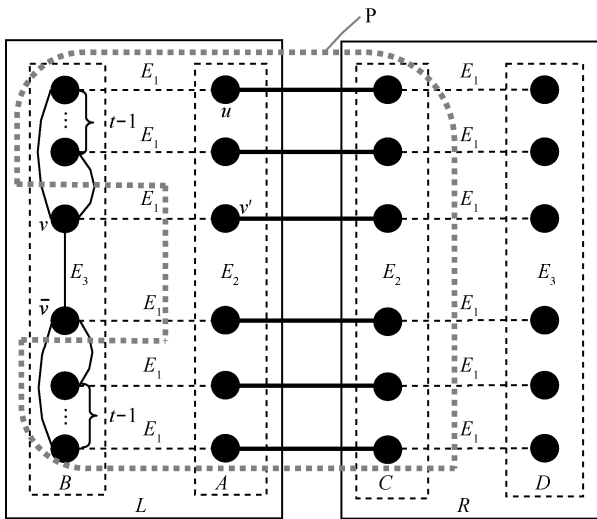


图 14 定理 10 中  $v \in B$  情况证明示意

所以综合 1) 的所有子情况可知，当存在节点  $u$  使  $N(u) \subset F$  时， $L-F_0 - \{u\}$  中任意的节点都与  $R-F_1$  连通。因此， $ECQ(s,t) - F - \{u\}$  连通，条件 2) 成立。

2) 对于任意节点  $u$  都有  $N(u) \not\subset F$

①  $u \in A$

设  $\bar{u} = N(u) \cap C$ ，当  $\bar{u} \notin F$  时，节点  $u$  可以通过边  $(u, \bar{u})$  来连通  $R-F_1$ 。

当  $\bar{u} \in F$  时，设  $v = N(u) \cap B$ 。如果  $v \notin F$ ，可采用上述情况 a) 的证明方法证得  $|F| \geq 2s$ ，这与  $|F| \leq 2s-1$  的条件相矛盾。而如果  $v \in F$ ，则可以采用上述情况 b) 的证明方法证得  $|F| \geq 2s$ ，这也与  $|F| \leq 2s-1$  的条件相矛盾。因此， $u$  与  $R-F_1$  连通。

②  $u \in B$

当  $N(u) \cap A \not\subset F$  时，可采用上述情况 a) 的证明方法可以证得  $|F| \geq 2s$ ，这与  $|F| \leq 2s-1$  的条件相矛盾。而当  $N(u) \cap A \subset F$  时，则可以按照  $v \in B$  情况的证明方法证得  $|F| \geq 2s$ ，这与  $|F| \leq 2s-1$  的条件相矛盾。因此， $u$  与  $R-F_1$  连通。

所以综合所有子情况可知，对于  $L-F_0$  中任意的节点  $u$ ，当  $N(u) \not\subset F$  时，节点  $u$  与  $R-F_1$  连通。所以  $L-F_0$  中的任意节点都与  $R-F_1$  连通。因此， $ECQ(s,t) - F$  连通，定理 10 条件 1) 满足。

证毕。

**定理 11** 设  $F$  是  $ECQ(s,t)$  中任意的一个节点集合，其中， $t \geq s \geq 2$ ， $|F| \leq 3s-3$ 。且  $F$  是  $ECQ(s,t)$  的一个条件故障集合，即要求对于任意节点  $u$ ， $u$  的邻节点集合都不属于  $F$ ，表示为  $N(u) \not\subset F$ ，那么  $ECQ(s,t) - F$  至少满足以下 2 个条件之一。

1)  $ECQ(s,t) - F$  连通；

2)  $ECQ(s,t) - F$  有且只有 2 个连通分支，其中之一是  $ECQ(s,t)$  的一条边，另一个有  $2^{s+t+1} - |F| - 2$  个节点。

**证明** 把  $ECQ(s,t)$  划分为 2 个  $ECQ(s-1,t)$ ，分别表示为  $L$  和  $R$ ，其中， $V(L) = \{0a_{s-2} \dots a_0 b_{t-1} \dots b_0 c\}$ ， $V(R) = \{1a_{s-2} \dots a_0 b_{t-1} \dots b_0 c\}$ 。设  $F_0 = F \cap L$ ， $F_1 = F \cap R$ ，其中， $|F| \leq 3s-3$ ，以下根据是否存在一条边  $(x,y)$  满足  $N(x,y) \not\subset F$  进行分情况说明。其中， $N(x,y) = N(x) \cup N(y) - \{x,y\}$ 。

1) 对于  $ECQ(s,t)$  的任意边  $(x,y)$ ，满足  $N(x,y) \not\subset F$  接下来分 2 种子情况进一步说明。

①  $|F_0| \geq 2s-2$  或  $|F_1| \geq 2s-2$

不失一般性，设  $|F_0| \geq 2s-2$ ，那么  $|F_1| \leq 3s-3 - (2s-2) = s-1$ 。由于  $k(R) = s$ ，所以  $R-F_1$  连通。以下说明对于任意节点  $u$ ， $u \in V(L) - F_0$ ，是否会与  $R-F_1$  相连通。由于  $N(u) \not\subset F$ ，所以存在节点  $v$ ， $v \in N(u) - F$ 。又由于  $N(u,v) \not\subset F$ ，所以存在节点  $w$ ， $w \in N(u,v) - F$ 。不失一般性，接下来分 4 种情况来说明节点  $u$  是否与  $R-F_1$  连通。

a)  $u \in A, v \in B, w \in B$

设  $u_c = N(u) \cap C$ , 当  $u_c \notin F_1$  时, 节点  $u$  可以通过边  $(u, u_c)$  与  $R - F_1$  连通。当  $u_c \in F_1$  时, 由定理 6 可知, 节点  $N[v]$  和  $N[u]$  至多只存在于一条相同的水平直线上。 $N[w]$  和  $N[u]$  至多也只存在于一条相同的水平直线上, 即  $v$  和  $u$  所在的水平直线。由于  $ECQ(s, t)$  不含节点三角, 所以  $N[v] \cap N[w] = \{v, w\}$ 。因此, 可知  $N[u, v, w]$  至少会出现在  $t-1+t-1+s-1+2 \geq 3s-1$  条水平直线上, 如图 15 所示, 其中,  $N[u, v, w] = N[u] \cup N[v] \cup N[w]$ 。如果要使节点  $u$  与  $R - F_1$  不连通, 那么  $P$  区域中至少存在  $3s-1$  条水平直线中, 每一条水平直线都至少要有有一个节点属于  $F$ 。因此, 要求  $|F| \geq 3s-1$ , 这与  $|F| \leq 3s-3$  的已知条件相矛盾, 所以节点  $u$  与  $R - F_1$  连通。因此,  $ECQ(s, t) - F$  连通, 定理 11 条件 1) 满足。

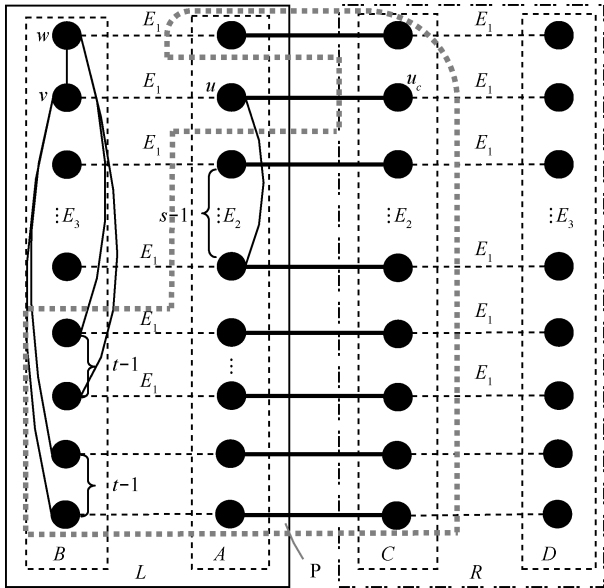


图 15 定理 11 情况 a) 证明示意

b)  $u \in A, v \in B, w \in A$

设  $u_c = N(u) \cap C$ 。当  $u_c \notin F_1$  时, 节点  $u$  可以通过边  $(u, u_c)$  与  $R - F_1$  连通。当  $u_c \in F_1$  时, 由于  $ECQ(s, t)$  不含节点三角, 所以可知,  $N[u, w] \cap A = 2s-2$ , 说明  $N[u, w]$  只会出现在  $2s-2$  条水平直线上。根据定理 6 可知  $N[u]$  和  $N[v]$  至多只存在于一条相同的水平直线上, 就是  $u$  和  $v$  所在的水平直线。同理,  $N[v]$  和  $N[w]$  至多只存在于一条相同的水平直线上, 也是  $u$  和  $v$  所在的水平直线。因此,  $N[u, v, w]$  至少会出现在  $2s-2+t \geq 3s-2$  条水平直线上, 如图 16 所示。如果要使

节点  $u$  与  $R - F_1$  不连通, 那么区域  $P$  中至少存在  $3s-2$  条水平直线, 每一条水平直线都至少要有有一个节点属于  $F$ 。因此, 要求  $|F| \geq 3s-2$ , 这与  $|F| \leq 3s-3$  的已知条件相矛盾。所以节点  $u$  与  $R - F_1$  连通,  $ECQ(s, t) - F$  连通, 定理 11 条件 1) 满足。

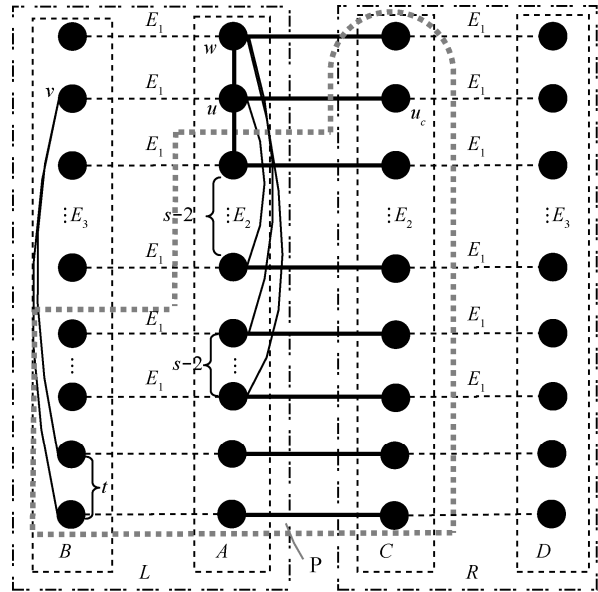


图 16 定理 11 情况 b) 证明示意

c)  $u \in A, v \in A, w \in A$

设  $u_c = N(u) \cap C, v_c = N(v) \cap C, w_c = N(w) \cap C$ 。当  $u_c \notin F_1$  (或  $v_c \notin F_1, w_c \notin F_1$ ) 时, 节点  $u$  可以通过边  $(u, u_c)$  (或  $(v, v_c), (w, w_c)$ ) 与  $R - F_1$  连通。当  $u_c \in F_1, v_c \in F_1$  并且  $w_c \in F_1$  时, 设  $u_b = N(u) \cap B, v_b = N(v) \cap B, w_b = N(w) \cap B$ 。如果  $u_b \notin F_0$  (或  $v_b \notin F_0, w_b \notin F_0$ ), 那么可以采用情况 b) 的证明方法证得节点  $u$  与  $R - F_1$  连通。当  $u_b \in F_0, v_b \in F_0$  并且  $w_b \in F_0$  时, 不失一般性, 设节点  $u, v$  和  $w$  的连线顺序是  $u-v-w$ , 如图 17 所示。由于  $ECQ(s, t)$  不含节点三角, 可知  $N(u) \cap N(v) = \emptyset, N(w) \cap N(v) = \emptyset$ , 并且  $|N(w) \cap N(u)| \leq 2, v \in N(w) \cap N(u)$ 。当  $|N(w) \cap N(u)| = 2$  时, 设  $x \in N(w) \cap N(u)$ 。则可知  $N[u, v, w] \cap A \geq s-3+s-3+s-3+1+3 = 3s-5$ 。所以要使节点  $u$  与  $R - F_1$  不连通, 那么区域  $P$  存在至少  $3s-5$  条水平直线, 每一条水平直线都至少要有有一个节点属于  $F$ , 又因为  $u_b \in F_0, v_b \in F_0$  且  $w_b \in F_0$ , 所以要求  $|F| \geq 3s-5+3 = 3s-2$ , 这与  $|F| \leq 3s-3$  的已知条件相矛盾。所以节点  $u$  与  $R - F_1$  连通,  $ECQ(s, t) - F$  连通, 定理 11 条件 1) 满足。

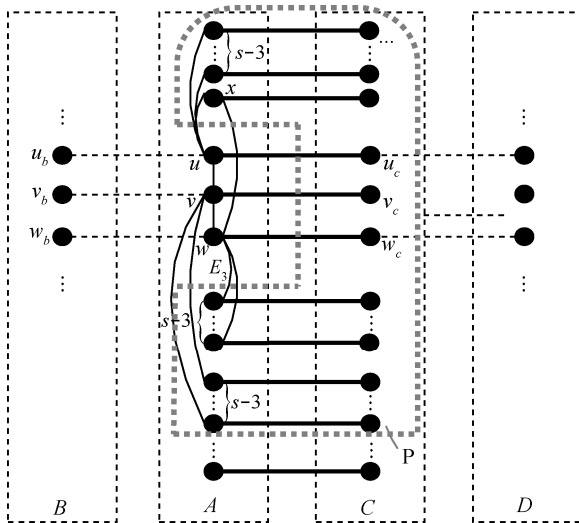


图 17 定理 11 情况 c) 证明示意

d)  $u \in B$ 、 $v \in B$ 、 $w \in B$

不失一般性，设节点  $u$ 、 $v$  和  $w$  的连线顺序是  $u-v-w$ ，如图 18 所示。根据  $ECQ(s,t)$  的定义可知  $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ 、 $N(v) \cap N(w) = \emptyset$ ，并且  $|N(u) \cap N(w)| \leq 2$ ，其中， $v \in N(w) \cap N(u)$ 。当  $|N(w) \cap N(u)| = 2$  时，设  $x \in N(w) \cap N(u)$ 。那么可知  $N[u,v,w]$  至少会出现在  $3(t-2)+1+3 \geq 3t-2 \geq 3s-2$  条水平直线上，如图 18 中的区域 P 所示。如果要使节点  $u$  与  $R-F_1$  不连通，那么区域 P 存在至少  $3s-2$  条水平直线，每一条水平直线都至少有一个节点属于  $F$ ，因此，要求  $|F| \geq 3s-2$ ，这与  $|F| \leq 3s-3$  的已知条件相矛盾。所以节点  $u$  与  $R-F_1$  连通， $ECQ(s,t)-F$  连通，定理 11 条件 1) 满足。

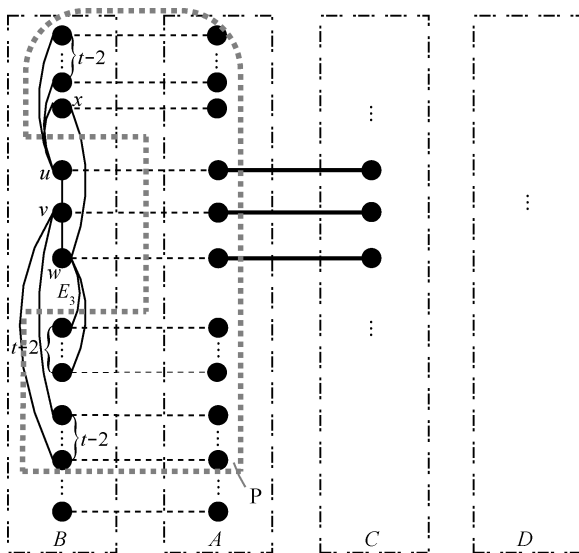


图 18 定理 11 情况 d) 证明示意

②  $|F_0| \leq 2s-3$  且  $|F_1| \leq 2s-3$

当  $L-F_0$  连通或者  $R-F_1$  连通时，可以按照情况 ① 的方法证得  $ECQ(s,t)-F$  连通。接下来证明  $L-F_0$  和  $R-F_1$  都不连通时的情况。

由于  $L$  和  $R$  是 2 个  $ECQ(s-1,t)$  子图，当  $|F_0| \leq 2(s-1)-1$ 、 $|F_1| \leq 2(s-1)-1$  时，由定理 10 可知， $L-F_0$  和  $R-F_1$  要么保持连通，要么只有 2 个连通分支，其中之一是平凡连通分支，另一个是非平凡连通分支。由于  $L-F_0$  和  $R-F_1$  都不连通，因此，存在  $u \in V(L)-F_0$ ，其中， $N(u) \cap V(L) \subset F_0$ 。同理，存在  $v \in V(R)-F_1$ ，其中， $N(v) \cap V(R) \subset F_1$ 。并且可知  $L-F_0-\{u\}$  连通， $R-F_1-\{v\}$  连通。接下来说明  $\{u\}$ 、 $\{v\}$ 、 $L-F_0-\{u\}$  和  $R-F_1-\{v\}$  四者之间是否连通。

如果  $u \in B$ ，那么要使  $\{u\}$  成为一个平凡连通分支，必然要求  $N(u) \subset F$ ，这与  $N(u) \not\subset F$  相矛盾，所以  $u \notin B$ ， $u \in A$ 。同理可证  $v \in C$ 。设  $u_c = N(u) \cap C$ 、 $v_a = N(v) \cap A$ ，可知  $u_c \notin F_1$ 、 $v_a \notin F_0$ 。由于  $R-F_1$  只有  $\{v\}$  和  $R-F_1-\{v\}$  2 个连通分支，如果  $u_c = v$ ，那么表明  $N(u,v) \subset F$ ，这与  $N(u,v) \not\subset F$  的条件相矛盾，所以  $u_c \in R-F_1-\{v\}$ 。因此，节点  $u$  与  $R-F_1-\{v\}$  相连通，同理可证节点  $v$  与  $L-F_0-\{u\}$  相连通。由于  $t \geq s > 2$  时  $2^{s+t-1} > 3s-3+2=3s-1 \geq |F|+|\{u,v\}|$  成立。所以必定存在一条连通  $L-F_0-\{u\}$  和  $R-F_1-\{v\}$  的边  $\{x, \bar{x}\}$ ，其中， $x \in L-F_0-\{u\}$ ， $\bar{x} \in R-F_1-\{v\}$ ，因此， $ECQ(s,t)-F$  连通。定理 11 条件 1) 满足。

2) 存在边  $(u,v)$  满足  $N(u,v) \subset F$

由  $N(u,v) \subset F$  可知， $|F \cap N(u,v)| = |N(u,v)| \geq 2s$ ，可推导出  $|F - N(u,v)| \leq 3s-3-(2s)=s-3$ 。由定理 8 可知， $K(ECQ(s,t)-N[u,v]) \geq s-2$ ，因此， $(ECQ(s,t)-N[u,v])-(F-N(u,v))$  连通，即  $ECQ(s,t)-\{u,v\}-F$  连通，所以， $ECQ(s,t)-F$  有 2 个连通分支，其中之一是  $ECQ(s,t)$  的一条边  $(u,v)$ ，另一个是  $ECQ(s,t)-\{u,v\}-F$ 。其中， $ECQ(s,t)-\{u,v\}-F$  连通分支有  $2^{s+t+1}-|F|-2$  个节点。定理 11 条件 2) 满足。

证毕。

接下来，对  $ECQ(s,t)$  在 MM 模型下的条件诊断度展开研究，首先求得  $t_c(ECQ(s,t))$  的上限。

**定理 12** MM 模型下交换交叉立方网络的条件诊断度  $t_c(ECQ(s,t)) \leq 3s-2$ ，其中， $t \geq s > 2$ 。

**证明** 设  $u$ 、 $v$ 、 $w$  是  $ECQ(s,t)$  的 3 个节点，且  $u$ 、 $v$ 、 $w$  是一个长度为 4 的节点环中的 3 个节点， $(u,v) \in E(ECQ(s,t))$ 、 $(v,w) \in E(ECQ(s,t))$ ，设  $F = N(u) \cup N(v) \cup N(w)$ ， $F_0 = F - \{v,w\}$ ， $F_1 = F - \{u,w\}$ 。那么可知  $F_0$  和  $F_1$  是  $ECQ(s,t)$  的 2 个条件故障集合， $F_0$  和  $F_1$  不可区分，并且  $|F_0| = |F_1| = 3s - 1$ 、 $|F_0 - F_1| = |F_1 - F_0| = 1$ 。由定理 1 可知  $ECQ(s,t)$  不是条件  $t$ -可诊断系统， $t = 3s - 1$ 。因此， $t_c(ECQ(s,t)) < 3s - 1$ ， $t_c(ECQ(s,t)) \leq 3s - 2$ 。证毕。

下面进一步推导，引入定理 13~定理 15 这 3 个对于判定 MM 模型下条件故障集合的可区分性至关重要的定理，并在此基础上推导出交换交叉立方网络在 MM 模型下的条件诊断度下限。

**定理 13** 设  $F_0$  和  $F_1$  是  $ECQ(s,t)$  的 2 个不同的条件故障集合，其中， $|F_0| \leq 3s - 2$ ， $|F_1| \leq 3s - 2$ 。并且记  $H$  是  $ECQ(s,t) - (F_0 \cap F_1)$  的最大连通分支，那么对于  $F_0 \Delta F_1$  中任意的节点  $u$ ，都有  $u \in H$ ，其中， $F_0 \Delta F_1 = (F_0 - F_1) \cup (F_1 - F_0)$ 。

**证明** 不失一般性，设  $u \in F_0 - F_1$ 。由于  $F_1$  是  $ECQ(s,t)$  的一个条件故障集合，所以必定存在一个节点  $v \in ECQ(s,t) - F_1 - \{u\}$ ，使  $(u,v) \in ECQ(s,t)$ 。假设  $u \notin H$ ，那么  $v \notin H$ 。因此，节点  $u$  和节点  $v$  都不属于  $H$ 。由于  $F_0 \neq F_1$ ，可知  $|F_0 \cap F_1| \leq 3s - 3$ 。因此，根据定理 11 可知， $ECQ(s,t) - (F_0 \cap F_1)$  不连通时只有 2 个连通分支，其中之一是  $(u,v)$ ，另一个是  $ECQ(s,t) - (F_0 \cap F_1) - \{u,v\}$ 。另外，可知节点  $v$  和节点  $u$  互为对方唯一不在  $F_0 \cap F_1$  的邻节点。当  $F_0$  是条件故障集合时，可知节点  $v$  的所有邻节点都属于  $F_0$ ，这与  $F_0$  是条件故障集合的已知条件相矛盾。所以假设错误， $u \in H$ 。证毕。

**定理 14**<sup>[22]</sup> 设图  $G$  满足  $\delta(G) \geq 2$ ，并且  $F_0$  和  $F_1$  是  $G$  的 2 个不同的条件故障集合，其中， $F_1 \subset F_0$ ，那么  $F_0$  和  $F_1$  在 MM 模型下可区分。

**定理 15** 设  $F_0$  和  $F_1$  是  $ECQ(s,t)$  的 2 个不同的条件故障集合，其中， $|F_0| \leq 3s - 2$ ， $|F_1| \leq 3s - 2$ 。那么  $F_0$  和  $F_1$  在 MM 模型下可区分，其中， $t \geq s \geq 2$ 。

**证明** 由定理 14 可知，当  $F_1 \subset F_0$  或  $F_0 \subset F_1$  时， $F_0$  和  $F_1$  在 MM 模型下可区分。因此，接下来只需要考虑  $|F_0 - F_1| \geq 1$  并且  $|F_1 - F_0| \geq 1$  时的情况。设  $X = F_0 \cap F_1$ ，可知  $X$  也是  $ECQ(s,t)$  的条件故障集合，由于  $F_0 \neq F_1$ ，则  $|X| \leq 3s - 3$ 。设  $H$  是  $ECQ(s,t) - (F_0 \cap F_1)$  的最大连通分支，由定理 13 可

知， $F_0 \Delta F_1$  中的节点都属于连通分支  $H$ 。另外，可知  $X$  的邻节点中最多有  $(t+1)|X|$  个节点属于  $H$ 。 $|F_0 \cup F_1| = |F_0| + |F_1| - |F_0 \cap F_1| \leq 2(3s - 2) - |X|$ 。由定理 11 可知， $ECQ(s,t) - X$  最多有 2 个节点不属于  $H$ 。由  $|X| \leq 3s - 3$  和条件  $t \geq s \geq 2$ ，可推导出  $2^{s+t+1} - 2 - (t+1)|X| - (2(3s - 2) - |X|) \geq 1$ 。因此可知， $H$  中存在着不属于  $F_0 \cup F_1$  也没有任何邻节点属于  $X$  的节点，设  $u$  是  $H$  中这样的一个节点，即  $u \notin F_0 \cup F_1$ ， $N(u) \cap X = \emptyset$ 。由于  $t \geq s \geq 2$ ，根据引理 1 可知节点  $u$  的度大于或等于 3，以下分 2 种情况进行说明。

1) 节点  $u$  没有邻节点属于  $F_0 \Delta F_1$

由定理 13 可知  $F_0 \Delta F_1 \subset H$ ，因此，可以找到一条长度至少为 2 的路径来连通节点  $u$  与  $F_0 \Delta F_1$  中的一个节点  $v$ 。设节点  $p$  和  $q$  是连通到节点  $v$  之前的 2 个节点，如图 19 所示，其中存在  $p = u$  的可能。因此，可知节点  $p$ 、 $q$  不属于  $F_0 \Delta F_1$ ，所以存在边  $(p,q)$  和  $(q,v)$ ，由定理 9 可知  $F_0$  和  $F_1$  可区分。

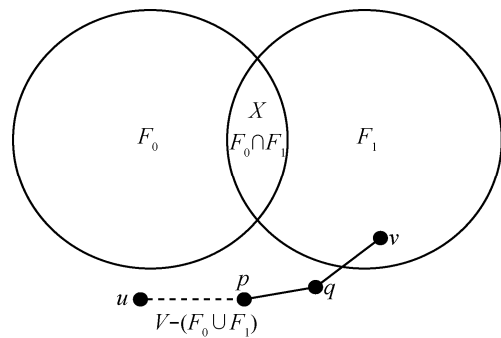


图 19 定理 15 情况 1) 证明示意

2) 节点  $u$  有邻节点属于  $F_0 \Delta F_1$

由于  $u \notin F_0 \cup F_1$ ， $N(u) \cap X = \emptyset$ ，可以进一步分为节点  $u$  至少有 2 个邻节点属于  $F_0 - F_1$ 、节点  $u$  至少有 2 个邻节点属于  $F_1 - F_0$ 、 $u$  只有一个邻节点属于  $F_0 - F_1$  只有一个邻节点属于  $F_1 - F_0$ 、 $u$  只有一个邻节点属于  $F_0 \Delta F_1$  4 种情况。由于节点  $u$  的度大于等于 3，所以由定理 9 可知，这 4 种情况  $F_0$  和  $F_1$  都可区分。

证毕。

**定理 16** MM 模型下交换交叉立方网络的条件诊断度  $t_c(ECQ(s,t)) \geq 3s - 2$ ，其中， $t \geq s \geq 2$ 。

**证明** 由定理 15 和定理 1 可知  $ECQ(s,t)$  在 MM 模型下是条件  $t$ -可诊断系统， $t = 3s - 2$ ，所以 MM 模型下  $t_c(ECQ(s,t)) \geq 3s - 2$ ，其中， $t \geq s \geq 2$ 。证毕。

**定理 17** MM 模型下交换交叉立方网络的条件诊断度  $t_c(ECQ(s,t)) = 3s - 2$ ，其中， $t \geq s \geq 2$ 。

**证明** 由定理 12 和定理 16 可以直接推导出定理 17，证毕。

### 6 仿真实验

仿真实验将对  $ECQ(s,t)$  ( $1 \leq s \leq t \leq 5$ ) 进行计算分析。通过这种方式来对交换交叉立方网络的拓扑性质、连通度与连通性质以及条件诊断度进行实验验证。整个仿真实验包括拓扑性质仿真实验、连通度与连通性质仿真实验以及条件诊断度仿真实验 3 个部分。

拓扑性质的仿真实验算法分为节点编码、邻接性计算、拓扑性质数据统计 3 个处理模块。算法首先对  $ECQ(s,t)$  所有节点进行编码，每一个节点用一个  $s+t+1$  位的二进制数来表示，共  $2^{s+t+1}$  个节点。接下来进行邻接性计算，把所有存在邻接性的节点以二元组的形式保存，形成了一个连通边二元组集合。最后，根据连通边二元组集合前节点和后节点的连接查询来进行拓扑性质数据统计。

以  $ECQ(1,2)$  为例，其节点用一个 4 位的二进制数表示，总节点数为  $2^{1+2+1} = 16$ ，总边数为  $(1+2+2) \times 2^{1+2-1} = 20$ 。邻接性计算之后形成的连通边二元组集合为  $\{(0000, 0001), (0001, 0000), (0000,$

$1000), (1000, 0000), (1000, 1001), (1001, 1000), (0001, 0011), (0011, 0001), (0001, 0101), (0101, 0001), (0101, 0111), (0111, 0101), (0111, 0011), (0011, 0111), (0101, 0100), (0100, 0101), (0100, 1100), (1100, 0100), (1100, 1101), (1101, 1100), (1101, 1001), (1001, 1101), (0111, 0110), (0110, 0111), (0110, 1110), (1110, 0110), (1110, 1111), (1111, 1110), (1111, 1101), (1101, 1111), (0011, 0010), (0010, 0011), (0010, 1010), (1010, 0010), (1010, 1011), (1011, 1010), (1011, 1111), (1111, 1011), (1011, 1001), (1001, 1011)\}$ ，任意一条边对应 2 个二元组元素，共 40 个二元组元素。根据连通边二元组集合前节点和后节点的连接查询可得出拓扑性质的仿真实验结果。 $ECQ(s,t)$  ( $1 \leq s \leq t \leq 5$ ) 的拓扑性质仿真实验数据如表 2 所示。

连通度与连通性质的仿真实验算法分为节点编码、去除约束节点和连通度与连通性计算 3 个处理模块。其中，节点编码的处理流程与拓扑性质仿真实验算法中的节点编码相同。第二步需要根据连通度和连通性的具体约束条件去除相关的节点或节点集合。连通度与连通性计算是通过去除任意  $x$  个节点或节点集合  $F$  的各种情况建立起各自不同的连通边二元组集合，然后对每一个连通边二元

**表 2**  $ECQ(s,t)$  ( $2 \leq s \leq t \leq 5$ ) 拓扑性质仿真实验结果

序号	s	t	拓扑性质				
			节点三角	$ N(u) \cap N(v) $	A 和 B 之间是否含有长度为 4 的环	$N[u]$ 和 $N[v]$ 至多出现在几条相同的水平直线中，其中， $u, v \in A$	$N[u]$ 和 $N[v]$ 至多出现在几条相同的水平直线中，其中， $u \in A, v \in B$
1	1	1	不含	$\leq 1$	不含	0	1
2	1	2	不含	$\leq 2$	不含	0	1
3	1	3	不含	$\leq 2$	不含	0	1
4	1	4	不含	$\leq 2$	不含	0	1
5	1	5	不含	$\leq 2$	不含	0	1
6	2	2	不含	$\leq 2$	不含	2	1
7	2	3	不含	$\leq 2$	不含	2	1
8	2	4	不含	$\leq 2$	不含	2	1
9	2	5	不含	$\leq 2$	不含	2	1
10	3	3	不含	$\leq 2$	不含	2	1
11	3	4	不含	$\leq 2$	不含	2	1
12	3	5	不含	$\leq 2$	不含	2	1
13	4	4	不含	$\leq 2$	不含	2	1
14	4	5	不含	$\leq 2$	不含	2	1
15	5	5	不含	$\leq 2$	不含	2	1

组集合进行连通分支计算。如果所有情况都只形成一个连通分支，那么连通度大于或等于  $x$ ，由此取得  $x$  的最大值。由于定理 7、定理 8 和定理 11 要求  $t \geq s \geq 2$ ，所以仿真实验计算了  $2 \leq s \leq t \leq 5$  的 10 种情况，实验结果分别如表 3 和表 4 所示。

条件诊断度的仿真实验算法需要首先调用文献[23]的条件故障模式(集合)算法取得  $ECQ(s,t)$  的所有条件故障集合，然后按照定理 9 的方法进行条件故障集合的可区分判定。如果故障节点数不大于  $t$  的所有条件故障集合都两两可区分，那么  $ECQ(s,t)$  满足 MM 模型下的条件  $t$ -可诊断，迭代下去并取得条件诊断度( $t$  的最大值)。 $ECQ(s,t)$  ( $2 \leq s \leq t \leq 5$ ) 10 种情况的条件诊断度仿真实验结果如表 5 所示。

表 3  $ECQ(s,t)$  ( $2 \leq s \leq t \leq 5$ ) 连通度仿真实验结果

序号	$s$	$t$	连通度	
			$k(ECQ(s,t) - N[u])$	$k(ECQ(s,t) - N[u,v])$
1	2	2	1	1
2	2	3	1	1
3	2	4	1	1
4	2	5	1	1
5	3	3	2	2
6	3	4	2	2
7	3	5	2	2
8	4	4	3	3
9	4	5	3	3
10	5	5	4	4

表 4  $ECQ(s,t)$  ( $2 \leq s \leq t \leq 5$ ) 连通性质仿真实验结果

序号	$s$	$t$	$ F  \leq 2s-1$ 时 $ECQ(s,t) - F$ 的连通情况	$F$ 是条件故障集合且 $ F  \leq 3s-3$ 时 $ECQ(s,t) - F$ 的连通情况
1	2	2	$ F  \leq 2$ 时连通; $2 <  F  \leq 3$ 时连通或只有 2 个连通分支 (一个平凡、一个非平凡)	$ F  \leq 3$ 时连通
2	2	3	$ F  \leq 2$ 时连通; $2 <  F  \leq 3$ 时连通或只有 2 个连通分支 (一个平凡、一个非平凡)	$ F  \leq 3$ 时连通
3	2	4	$ F  \leq 2$ 时连通; $2 <  F  \leq 3$ 时连通或只有 2 个连通分支 (一个平凡、一个非平凡)	$ F  \leq 3$ 时连通
4	2	5	$ F  \leq 2$ 时连通; $2 <  F  \leq 3$ 时连通或只有 2 个连通分支 (一个平凡、一个非平凡)	$ F  \leq 3$ 时连通
5	3	3	$ F  \leq 3$ 时连通; $3 <  F  \leq 5$ 时连通或只有 2 个连通分支 (一个平凡、一个非平凡)	$ F  \leq 5$ 时连通; $5 <  F  \leq 6$ 时连通或只有 2 个连通分支 (其中之一是一条边)
6	3	4	$ F  \leq 3$ 时连通; $3 <  F  \leq 5$ 时连通或只有 2 个连通分支 (一个平凡、一个非平凡)	$ F  \leq 5$ 时连通; $5 <  F  \leq 6$ 时连通或只有 2 个连通分支 (其中之一是一条边)
7	3	5	$ F  \leq 3$ 时连通; $3 <  F  \leq 5$ 时连通或只有 2 个连通分支 (一个平凡、一个非平凡)	$ F  \leq 5$ 时连通; $5 <  F  \leq 6$ 时连通或只有 2 个连通分支 (其中之一是一条边)
8	4	4	$ F  \leq 4$ 时连通; $4 <  F  \leq 7$ 时连通或只有 2 个连通分支 (一个平凡、一个非平凡)	$ F  \leq 7$ 时连通; $7 <  F  \leq 9$ 时连通或只有 2 个连通分支 (其中之一是一条边)
9	4	5	$ F  \leq 4$ 时连通; $4 <  F  \leq 7$ 时连通或只有 2 个连通分支 (一个平凡、一个非平凡)	$ F  \leq 7$ 时连通; $7 <  F  \leq 9$ 时连通或只有 2 个连通分支 (其中之一是一条边)
10	5	5	$ F  \leq 5$ 时连通; $5 <  F  \leq 9$ 时连通或只有 2 个连通分支 (一个平凡、一个非平凡)	$ F  \leq 9$ 时连通; $9 <  F  \leq 12$ 时连通或只有 2 个连通分支 (其中之一是一条边)

表 5  $ECQ(s, t)(2 \leq s \leq t \leq 5)$  条件诊断度仿真实验结果

序号	$s$	$t$	$t_c(ECQ(s, t))$
1	2	2	4
2	2	3	4
3	2	4	4
4	2	5	4
5	3	3	7
6	3	4	7
7	3	5	7
8	4	4	10
9	4	5	10
10	5	5	13

仿真实验结果进一步印证  $ECQ(s, t)$  相关拓扑性质、连通度与连通性质以及条件诊断度定理的正确性。

### 7 下一步工作

与多处理器计算机系统一样，高性能计算机系统的构建同样需要互连网络。随着高性能计算机系统中路由器端口和阶数的不断增加，原有的拓扑结构不再满足需要，于是以 Dragonfly<sup>[24]</sup>和 Slim Fly<sup>[25]</sup>为代表的高阶互连网络<sup>[26]</sup>成为构建高性能计算机系统的主要手段。Dragonfly 和 Slim Fly 采取了层次化的构建思想，这种方式不仅可以减少网络直径，而且可以有效利用电互连和光互连的特点在保证低延迟的同时降低成本<sup>[27]</sup>。高阶互连网络由于具有通信延迟低、扩展性好、功耗低等特点，使其成为当下的研究热点。那么与本文研究的交换交叉立方网络为代表的新型互连网络相比，二者在拓扑性质与应用领域方面是否存在差异。通过比较  $CQ_n$ 、 $ECQ(s, t)$ 、Dragonfly 和 Slim Fly 的拓扑性质，如表 6 所示。相对 Dragonfly 和 Slim Fly 而言， $CQ_n$  和  $ECQ(s, t)$  的网络直径较大，由此会产生较大的通信延迟，进而影响到整个系统的执行速度和支持的任

务粒度。而 Dragonfly 和 Slim Fly 在容错性（包括连通度和条件连通度）和诊断性（包括诊断度和条件诊断度）等可靠性参数上还未测定，当出现部分节点或链路故障的时候，这种类型的互连网络无法进行故障定位，也缺乏稳定的容错手段。

因此，以交换交叉立方网络为代表的新型互连网络，由于具有正规性、对称性、强连通性和可诊断性等特点，当出现故障的时候，网络不仅可以快速地进行故障定位，同时，提供了更大的容错能力。因此，更适用于大规模多处理器计算机系统。而高阶互连网络主要考虑的是通信延迟、扩展性、功耗和弹性，因此更加适用于网络通信和高阶路由器的设计。

随着系统规模的不断扩大，高性能计算机将同时面对通信墙和可靠性墙的挑战<sup>[28]</sup>。如果能把以 Dragonfly 为代表的高阶互连网络与以交换交叉立方网络为代表的新型互连网络进行交叉融合，那么这样的互连网络既可以保持高阶互连网络的超低网络直径，又具备较高的可靠性。以此为f目标，本文进行了初步研究。以  $ECQ(s, t)$  为例，表面上看  $ECQ(s, t)$  并不具备 Dragonfly 的层次结构，但是由引理 4 可知  $ECQ(s, t)$  可划分为  $2^s$  个  $CQ_i$  和  $2^t$  个  $CQ_s$ ，不同  $CQ_i$ （或  $CQ_s$ ）之间互不连接， $CQ_i$  和  $CQ_s$  之间却可能存在直接连接。如此一来可以把  $ECQ(2, 2)$  划分成如图 20 所示的结构，并进一步规整成如图 21 所示的层次结构，这种变形以后的拓扑结构与 Dragonfly 的层次结构高度相似。未来可以对  $ECQ(s, t)$  进行层次化改造，使其在具备高容错和可诊断性的同时具备 Dragonfly 级别的网络直径，并可以对发生在这种网络结构上故障进行算法诊断。因此，这种互连网络的交叉融合有可能成为解决通信墙和可靠性墙这一列技术难题的重要方向和手段。未来可以以此为方向进行深入研究。

表 6  $CQ_n$ 、 $ECQ(s, t)$ 、Dragonfly 和 Slim Fly 的拓扑性质

网络结构	网络直径	连通度	条件连通度	诊断度(PMC)	条件诊断度(MM)
$CQ_n$	$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$	$n$	$2n-2$	$n$	$3n-5$
$ECQ(s, t)$	$\left\lceil \frac{s+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t+1}{2} \right\rceil + 2$	$s+1$	$2s$	$s+1$	$3s-2$
Dragonfly	3	—	—	—	—
Slim Fly	2	—	—	—	—

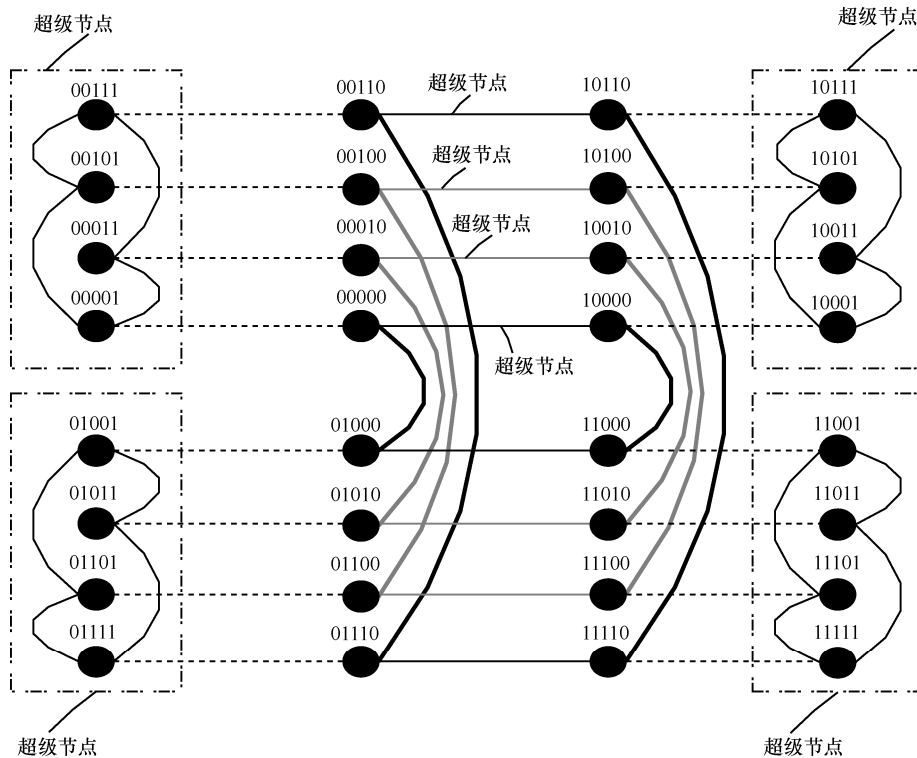


图 20 ECQ(2,2) 层次化改造

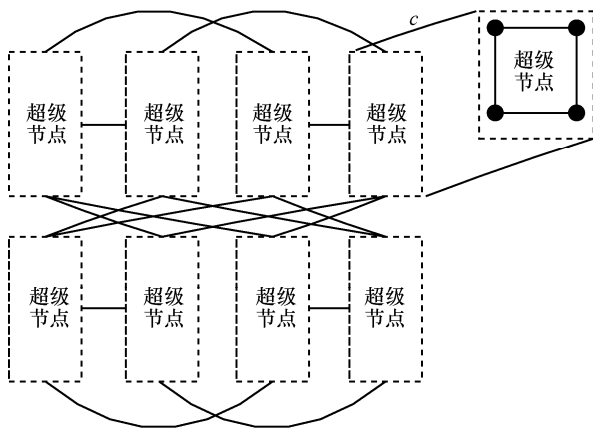


图 21 ECQ(2,2) 层次结构

### 8 结束语

本文以交换交叉立方网络为研究对象，对交换交叉立方网络的拓扑结构展开研究，通过假设和推导得出交换交叉立方网络  $ECQ(s,t)$  的拓扑性质和连通度定理。在此基础上证明 MM 模型下交换交叉立方网络  $ECQ(s,t)$  的条件诊断度为  $3s-2$ ，其中， $t \geq s > 2$ 。进而通过仿真实验验证了相关结论的正确性。最后阐明下一步将在互连网络的交叉融合方面展开研究。交换交叉立方网络的拓扑性质、连通度与连通性质以及条件诊断度的研究成果将有利

于进一步厘清交换交叉立方网络的可靠性能，从而促进交换交叉立方网络的应用和推广。

### 参考文献：

- [1] SQUIRE G S, PALAIS S M. Physical and logical design of a highly parallel computer[R]. Tech Note,1962,University of Michigan.
- [2] EL-AMAWY A, LATIFI S. Properties and performance of folded hypercubes[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems,1991, 2(3): 31-42
- [3] EFE K. The crossed cube architecture for parallel computation[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1992,3(5): 513-646.
- [4] LARSON S M, CULL P. The Möbius cubes[J]. IEEE Transactions on Computer,1995,44(5): 647-659.
- [5] HUANG K, WU J. Area efficient layout of balanced hypercubes[J]. International Journal of High Speed Electronics and Systems, 1995, 6(4):631-646.
- [6] WANG D Q, ZHAO L C. The twisted-cube connected networks[J]. Computer Science and Technology,1999,2(14):181-186.
- [7] YANG X F, EVANS D J, MEGSON G M. The locally twisted cubes[J]. International Journal of Computer Mathematics,2005,82(4):401-413.
- [8] PETER K K, HSU W J, PAN Y. The exchanged hypercube[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2005,6(9):866-874.
- [9] LI K, MU Y, LI K, et al. Exchanged crossed cube: a novel interconnection network for parallel computation[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2013, 24(11): 2211-2219.
- [10] LAI P L, TAN J M , CHANG C P, et al. Conditional diagnosability measures for large multiprocessor systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 2005, 54(2): 165-175.

- [11] ZHU Q. On conditional diagnosability and reliability of the BC networks[J]. Journal of Supercomputing, 2008, 45(2):173-184.
- [12] XU M, THULASIRAMAN K, HU X D. Conditional diagnosability of matching composition networks under the PMC model[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2009, 56(11): 875-879.
- [13] HSU G H, CHIANG C F, SHIH L M, et al. Conditional diagnosability of hypercubes under the comparison diagnosis model[J]. Journal of Systems Architecture, 2009, 55(2):140-146.
- [14] YANG M C. Conditional diagnosability of matching composition networks under the MM\* model[J]. Information Sciences, 2013, 233(233): 230-243.
- [15] YANG M C. Conditional diagnosability of balanced hypercubes under the PMC model[J]. Information Sciences, 2013, 222(222):754-760.
- [16] YANG M C. Conditional diagnosability of balanced hypercubes under the MM\* model[J]. The Journal of Supercomputing, 2013, 65(3): 1264-1278.
- [17] MALEK M. A comparison connection assignment for diagnosis of multiprocessor systems[C]//Seventh Int'l Symp, Computer Architecture. 1980: 31-36.
- [18] PREPARATA F P, METZE G, CHIEN R T. On the connection assignment problem of diagnosable systems[J]. IEEE Transactions on Electronic Computers, 1967, 16(12):848-854.
- [19] NING W, FENG X, WANG L. The connectivity of exchanged crossed cube[J]. Information Processing Letters, 2015, 115(2):394-396.
- [20] FAN J, LIN X, JIA X. Node-pancyclicity and edge-pancyclicity of crossed cubes[J]. Information Processing Letters, 2005, 93(3):133-138.
- [21] SENGUPTA A, DAHBURA A T. On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosis by the comparison approach[J]. IEEE Transactions on Computers, 1992, 41(11):1386-1396.
- [22] LIN C, TAN J J M, HSU L, et al. Conditional diagnosability of cayley graphs generalized by transposition tree under the comparison diagnosis model[J]. Journal of Interconnection Networks, 2008, 9(1):83-97.
- [23] 郭晨, 梁家荣, 冷明. 基于 PMC 模型的条件故障诊断[J]. 电子学报, 2015, 43(11): 2331-2337.
- GUO C, LIANG J R, LENG M. The conditional fault diagnosis of PMC model[J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(11): 2331-2337.
- [24] KIM J, DALLY W J, SCOTT S, et al. Technology-driven, highly-scalable dragonfly topology[J]. Acm Sigarch Computer Architecture News, 2008, 36(3):77-88.
- [25] BESTA M, HOEFLER T. Slim Fly: a cost effective low-diameter network topology[C]//High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis, SC14: International Conference for. IEEE, 2014: 348-359.
- [26] KIM J. High-radix interconnection networks[D]. Palo Alto:Stanford University, 2008.
- [27] 雷斐, 董德尊, 庞征斌, 等. Paleyfly:一种可扩展的高速互连网络拓扑结构[J]. 计算机研究与发展, 2015, 52(6):1329-1340.
- LEI F, DONG D Z, PANG Z B, et al. Paleyfly: a scalable topology in high performance interconnection network[J]. Journal of Computer Research and Development, 2015, 52(6):1329-1340.
- [28] 廖湘科, 肖依. 新型高性能计算系统与技术[J]. 中国科学: 信息科学, 2016, 46(9): 1175-1210.
- LIAO X K, XIAO N. Emerging high-performance computing systems and technology[J]. Scientia Sinica Informations, 2016, 46(9): 1175-1210.

#### 作者简介:



郭晨 (1979-), 男, 江西泰和人, 博士, 井冈山大学副教授, 主要研究方向为网络分析与控制、新型互连网络和系统级故障诊断等。

冷明 (1975-), 男, 江西高安人, 博士, 井冈山大学教授, 主要研究方向为网络分析与控制、云计算和大数据等。

彭硕 (1982-), 男, 江西吉安人, 井冈山大学讲师, 主要研究方向为智能算法、数据挖掘和数据分析等。

王博 (1980-), 男, 江西吉安人, 井冈山大学副教授, 主要研究方向为神经网络和进化算法。